振動特性の分析

本ワークシートの内容

- 一輪車両モデルの路面変位による伝達特性と可視化をおこないます。
- 特性方程式および伝達関数の導出
- 可視化により伝達特性を把握する

キーワード

- 伝達関数
- ボード線図
- 振動解析

対象

自動車工学、振動解析

はじめに

本ワークシートは、竹原伸 著　森北出版株式会社 『はじめての自動車運動学　力学の基礎から学ぶクルマの動き』(https://www.morikita.co.jp/books/mid/067101) の第 10 章「乗り心地」10.1「車体の振動」(p128-133) を元に作成されています。

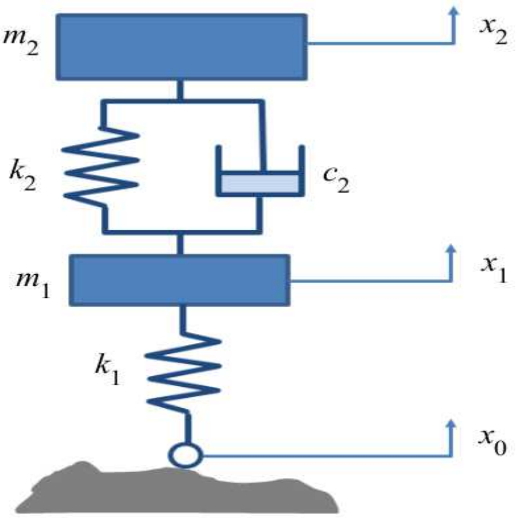
車両の振動モデル

ここでは、二自由度モデルを用いて、基本的な振動特性を把握します。

二自由度モデル

振動の解析を行うために、車両を二自由度のモデルとして考えます。

- **変数の定義**



[車両の一輪モデル (二自由度モデル)]

m_1 ばね下質量 (ブレーキやホイールで構成される)

m_2 ばね上質量 (車体や乗員からなる)

k_1 タイヤばね定数

k_2 サスペンションのばね定数

c_2 減衰係数

x_0 路面変位

x_1 ばね下

x_2 ばね上

- タイヤばねの復元力は、路面変位とばね下との相対変位 $\left(x_1 - x_0\right)$ で発生する。
- サスペンションばねの復元力は、相対変位 $\left(x_1 - x_2\right)$, ダンパーの減衰力は相対速度 $\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)$ に比例した力。
- 運動の関係式は、以下のとおり：

$$m_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} x_1(t)\right) + c_2 \left(\frac{d}{dt} x_1(t) - \frac{d}{dt} x_2(t)\right) + k_2 \left(x_1(t) - x_2(t)\right) + k_1 \left(x_1(t) - x_0(t)\right) = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$m_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} x_2(t)\right) + c_2 \left(\frac{d}{dt} x_2(t) - \frac{d}{dt} x_1(t)\right) + k_2 \left(x_2(t) - x_1(t)\right) = 0 \quad \textbf{(2)}$$

```
> restart
```

▼ 運動方程式の定義

まず始めに、振動の解析をするにあたり、運動の関係式を定義します。

> $dsys := m_1\left(\frac{d^2}{dt^2}x_1(t)\right) + c_2\left(\frac{d}{dt}x_1(t) - \left(\frac{d}{dt}x_2(t)\right)\right) + k_2\left(x_1(t) - x_2(t)\right) + k_1\left(x_1(t) - x_0(t)\right) = 0,$
> $m_2\left(\frac{d^2}{dt^2}x_2(t)\right) + c_2\left(\frac{d}{dt}x_2(t) - \left(\frac{d}{dt}x_1(t)\right)\right) + k_2\left(x_2(t) - x_1(t)\right) = 0$

$$dsys := m_1\left(\frac{d^2}{dt^2}x_1(t)\right) + c_2\left(\frac{d}{dt}x_1(t) - \frac{d}{dt}x_2(t)\right) + k_2\left(x_1(t) - x_2(t)\right) + k_1\left(x_1(t) - x_0(t)\right) = 0, m_2\left(\frac{d^2}{dt^2}x_2(t)\right) + c_2\left(\frac{d}{dt}x_2(t) - \frac{d}{dt}x_1(t)\right) + k_2\left(x_2(t) - x_1(t)\right) = 0 \quad \textbf{(3)}$$

▼ ばね上/ばね下振動特性の分析

振動特性の分析
ばね上とばね下の振動特性を分析します。路面変位 X_0 によるばね下、ばね上変位の伝達特性をみていきます。

DynamicSystems パッケージの DiffEquation コマンドを使い、微分方程式からシステムオブジェクトを生成した後、振動特性を可視化します。

まず始めに DynamicsSystems パッケージをロードします。

> $with(DynamicSystems):$

DiffEquation コマンドを用いて、システムオブジェクトを生成します。

> $sys := DiffEquation([dsys], [x_0(t)], [x_1(t), x_2(t)])$

$$sys := \left|\begin{array}{c} \textbf{Diff. Equation} \\ \text{continuous} \\ \text{2 output(s); 1 input(s)} \\ \text{inputvariable} = [x_0(t)] \\ \text{outputvariable} = [x_1(t), x_2(t)] \end{array}\right. \quad \textbf{(4)}$$

ここから伝達関数システムオブジェクトを生成します。

> $sys2 := TransferFunction(sys)$

$$sys2 := \left[\begin{array}{c} \textbf{Transfer Function} \\ \text{continuous} \\ \text{2 output(s); 1 input(s)} \\ \text{inputvariable} = [x_0(s)] \\ \text{outputvariable} = [x_1(s), x_2(s)] \end{array}\right] \quad \mathbf{(5)}$$

PrintSystem コマンドを使って、上で生成したシステムオブジェクトの内容を参照します。

> $PrintSystem(sys2)$

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{Transfer Function} \\ \text{continuous} \\ \text{2 output(s); 1 input(s)} \\ \text{inputvariable} = [x_0(s)] \\ \text{outputvariable} = [x_1(s), x_2(s)] \\ \mathrm{tf}_{1,1} = \dfrac{k_1 m_2 s^2 + c_2 k_1 s + k_1 k_2}{m_1 m_2 s^4 + (c_2 m_1 + c_2 m_2) s^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2) s^2 + c_2 k_1 s + k_1 k_2} \\ \mathrm{tf}_{2,1} = \dfrac{c_2 k_1 s + k_1 k_2}{m_1 m_2 s^4 + (c_2 m_1 + c_2 m_2) s^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2) s^2 + c_2 k_1 s + k_1 k_2} \end{array}\right. \quad \mathbf{(6)}$$

ここから伝達関数を取り出すには、以下のように記述します。

> $sys2 :- tf$

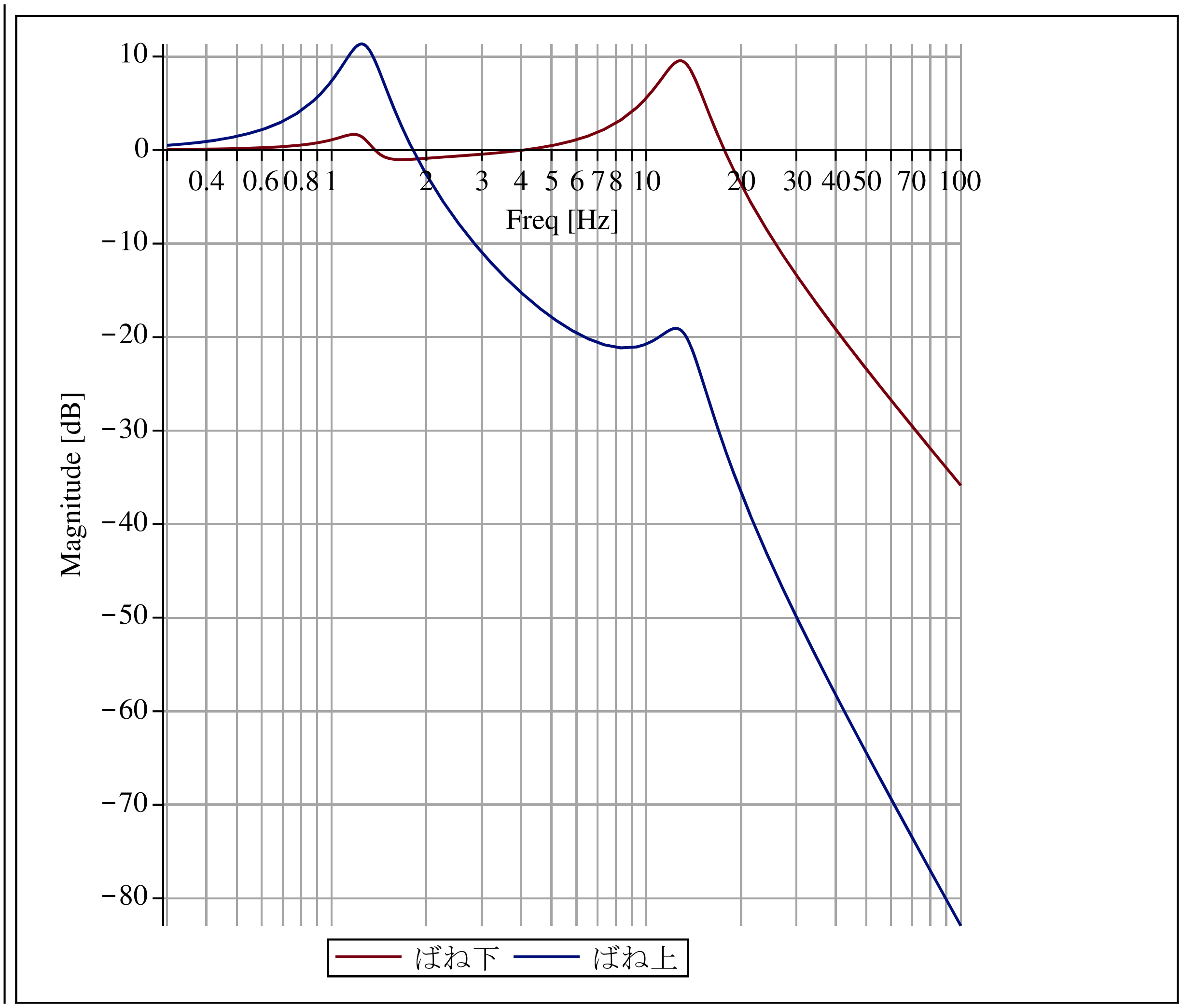
$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{k_1 m_2 s^2 + c_2 k_1 s + k_1 k_2}{m_1 m_2 s^4 + (c_2 m_1 + c_2 m_2) s^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2) s^2 + c_2 k_1 s + k_1 k_2} \\ \dfrac{c_2 k_1 s + k_1 k_2}{m_1 m_2 s^4 + (c_2 m_1 + c_2 m_2) s^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2) s^2 + c_2 k_1 s + k_1 k_2} \end{array}\right] \quad \mathbf{(7)}$$

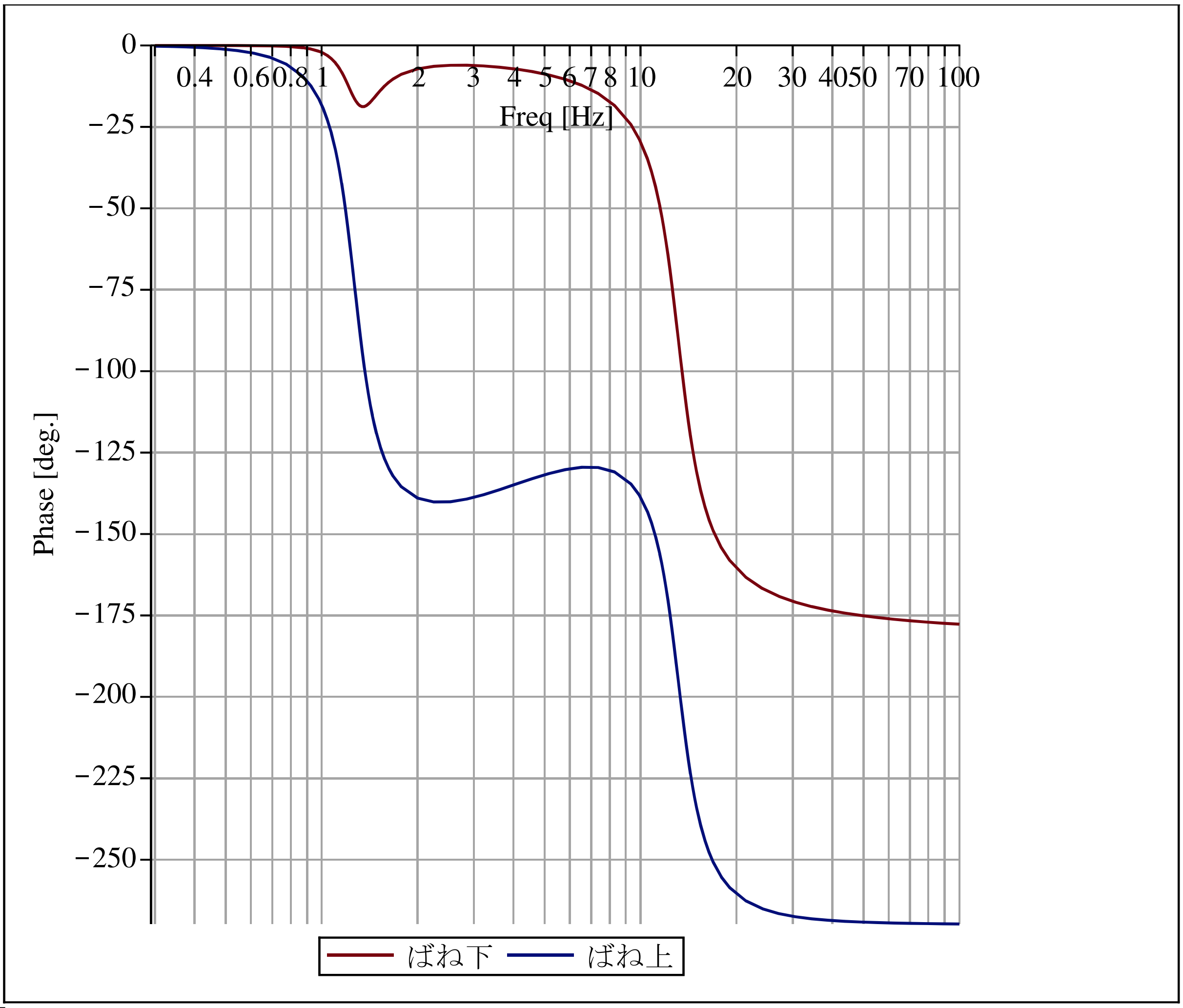
ボード線図を描画するにあたり、パラメータを定義します。

> $params := [m_1 = 40, m_2 = 360, k_1 = 250000, k_2 = 25000, c_2 = 1000]:$

ボード線図によって、伝達特性を可視化します。

> $BodePlot(sys, range = 0.3 ..100, parameters = params, hertz = true, legend = [$"ばね下", "ばね上"$])$


10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
−80
Magnitude [dB]
0.4
0.6
0.8
1
2
3
4
5
6
7
8
10
20
30
40
50
70
100
Freq [Hz]
ばね下
ばね上



>

このようにして、路面変位によるばね下、ばね上変位の伝達特性を見ることができました。

▼ 主な利用コマンド

コマンド名	説明
• **diff(式, 変数, 変換後の変数)**	微分
• **diff(式, 変数$n)**	n階微分
• **with(パッケージの名前)**	パッケージの読み込み 使用例：**with(DynamicSystems):**
• **DynamicSystems[DiffEquation](微分方程式, 入力変数, 出力変数)**	微分方程式システムオブジェクトの作成
• **DynamicSystems [TransferFunction](システムオブジェクト)**	伝達関数システムオブジェクトの作成

- **DynamicSystems[PrintSystem](システムオブジェクト)** システムオブジェクトの内容を表示
- **DynamicSystems[BodePlot](システムオブジェクト、オプション)** ボード線図の描画

参考文献

竹原伸 (2014)『はじめての自動車運動学　力学の基礎から学ぶクルマの動き』, 森北出版株式会社