

車両の最大登坂角

作成者 : Maplesoft Japan 株式会社
Email: support_jp@maplesoft.com

本ワークシートの内容

- 車両の最大登坂角を求める式を導出します。

キーワード

- 式の操作（式の変換、式への代入、式のまとめ方など）

対象

- 自動車工学、数学一般、工学一般

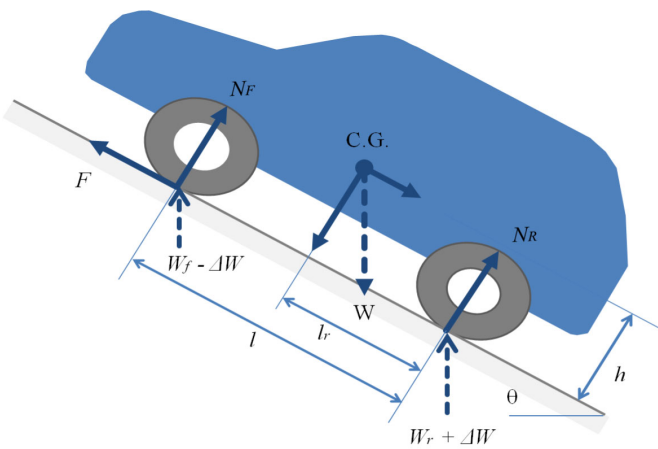
はじめに

本ワークシートは、竹原伸 著 森北出版株式会社 『はじめての自動車運動学 力学の基礎から学ぶクルマの動き』 (<https://www.morikita.co.jp/books/mid/067101>) の第 7 章 7.1 「加速と登坂の運動」 (p85-89) を元に作成されています。

最大登坂角

ここでは、パワートレインの出力が十分大きい車両が、傾斜面を登坂できる最大登坂角を考えます。

車両の最大登坂角を前輪駆動車、後輪駆動車、四輪駆動車それぞれについて考えます。パワートレインの出力は十分大きいと仮定します。



W 車両重量

W_f 前輪荷重

W_r 後輪荷重

ΔW 荷重移動

F 前輪の駆動力

N_F 前輪抗力

N_R 後輪抗力

l ホイールベース

l_r 重心～後輪中心距離

h 重心高さ

θ 最大登坂角

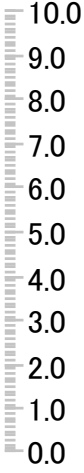
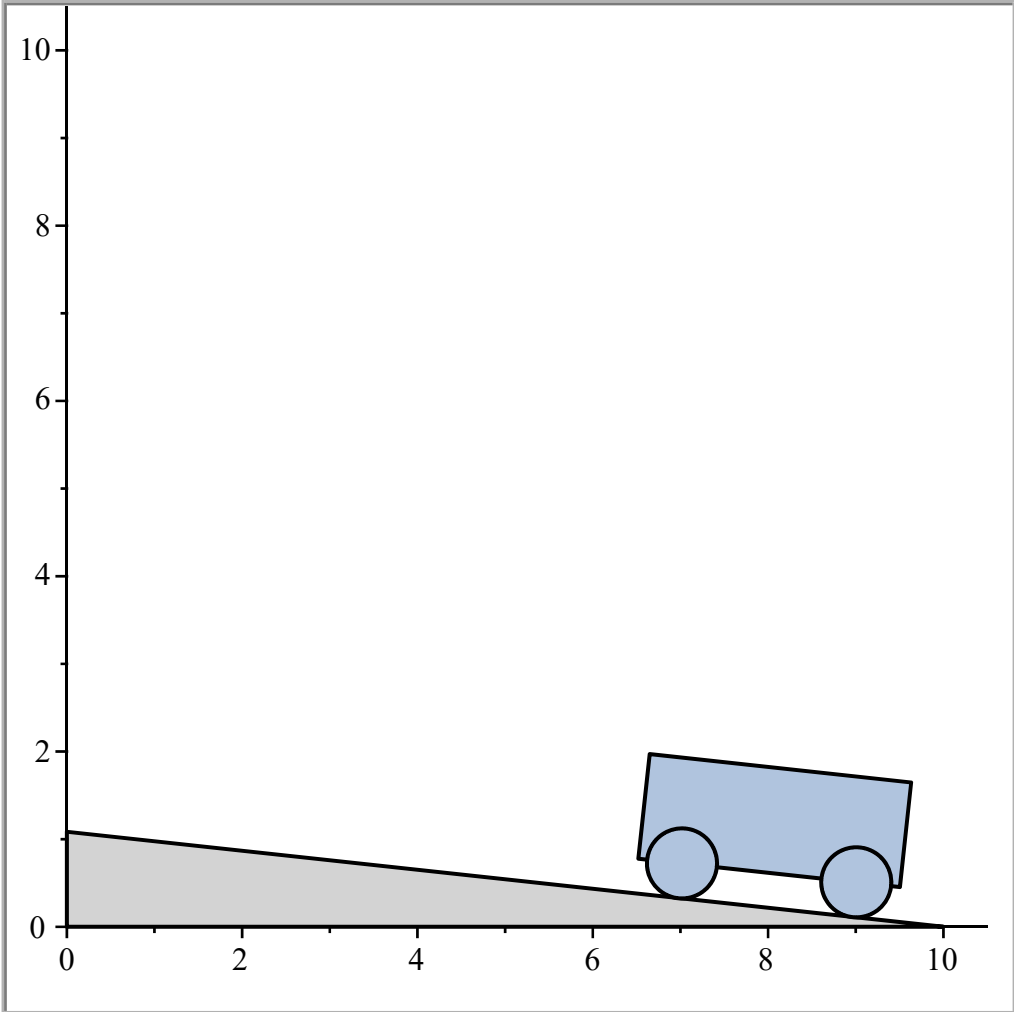
(前輪または後輪がフリーに回転して車両が登ることのできる角度)

アプリケーション

このアプリケーションは、任意のパラメータ値を持つ車両が、任意の角度の坂を上ることができるかを可視化するアプリケーションです。

駆動方式を "Front-wheel-drive" (前輪駆動車)、"Rear-wheel-drive" (後輪駆動車)、"Four-wheel-drive" (四輪駆動車) から選択し、パラメータ値を設定します。上の図を坂の高さのスライダーを動かすことで、坂の角度を変えることができます。

[Roll] ボタンをクリックすると、ボールが前進、または後進します。

駆動方式の選択 "Front-w...	坂の傾斜角度 : <input type="text" value="6.19*degrees"/> 車両の最大登坂角 : <input type="text" value="12.5*degrees"/>
判定 : <input type="text" value="OK"/>	車両の進行方向 : <input type="text" value="Forward"/>
坂の高さ 	
	パラメータの設定 :

Roll	摩擦係数 μ	<input type="text" value="0.5"/>
	重心-前輪の中心距離 l_f	<input type="text" value="1"/>
	重心-後輪の中心距離 l_r	<input type="text" value="1"/>
	重心高さ h	<input type="text" value="0.5"/>

> restart

前後輪の抗力

まず始めに、各駆動方式の最大登坂角を求めるにあたり、力のモーメントを考慮した前後輪の抗力を求めます。

車両は駆動力 F が以下の条件の時に登坂することができます。

$$W \sin(\theta) \leq F \quad (\text{傾斜面に沿った方向を正とする})$$

• 抗力

斜面と垂直方向に作用する前後輪の抗力をそれぞれ N_F, N_R とすると、以下のようになります。

前輪の抗力：

$$N_F := (W_f - \Delta W) \cdot \cos(\theta)$$

後輪の抗力：

$$N_R := (W_r + \Delta W) \cdot \cos(\theta)$$

• 力のモーメント

次に前後輪接地点を中心とする力のモーメントのつり合い式を考えます。

前輪接地点を中心とした場合を NR, 後輪接地点を中心とした場合を NF という変数に割り当てます。

前輪接地点を中心とする力のモーメントのつり合い式：

$$\begin{aligned} > NR := N_R l = W (l_f \cos(\theta) + (h \sin(\theta))) \\ & NR := N_R l = W (l_f \cos(\theta) + h \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (1)$$

後輪接地点を中心とする力のモーメントのつり合い式：

$$\begin{aligned} > NF := N_F \cdot l = W \cdot (l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta)) \\ & NF := N_F l = W (l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (2)$$

• 力のモーメントを考慮した前後輪の抗力

力のモーメントを考慮した前後輪の抗力は、それぞれ以下のとおりとなります。

前輪抗力：

> $NFI := isolate(NF, N_F)$

$$NFI := N_F = \frac{W(l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \quad (3)$$

後輪抗力：

> $NRI := isolate(NR, N_R)$

$$NRI := N_R = \frac{W(l_f \cos(\theta) + h \sin(\theta))}{l} \quad (4)$$

前輪駆動車の最大登坂角

前輪駆動車が登坂できる最大角 θ は、以下となります。

$$\tan(\theta) \leq \frac{\mu l_r}{h \mu + l}$$

• 式の定義

パワートレインの出力が十分大きい場合において、前輪駆動車の駆動力 F は、抗力 N_F とタイヤと路面の摩擦係数 μ を用いて次式で示されます。

前輪駆動車は、駆動力 F が以下の条件の時、登坂できます。

> $F := \mu \cdot N_F \geq W \cdot \sin(\theta)$

$$F := W \sin(\theta) \leq \mu N_F \quad (5)$$

力のモーメントを考慮した前輪の抗力：

> NFI

$$N_F = \frac{W(l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \quad (6)$$

eval コマンドを使って、登坂の条件式に前輪の抗力を代入します。

> $eval(F, NFI)$

$$W \sin(\theta) \leq \frac{\mu W(l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \quad (7)$$

Maple では、不等式などの範囲に対して、割り算を施すことはできません。よって、式の操作のために不等式を一旦、等式に変換します。

> $convert((7), equality)$

$$W \sin(\theta) = \frac{\mu W (l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \quad (8)$$

式を $\sin(\theta)$ について解きます。

> `solve((8), {sin(theta)})[1]`

$$\sin(\theta) = \frac{\mu l_r \cos(\theta)}{h \mu + l} \quad (9)$$

両辺を $\cos(\theta)$ で割ります。

> $\frac{(9)}{\cos(\theta)}$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\mu l_r}{h \mu + l} \quad (10)$$

左辺を $\tan(\theta)$ に変換します。

> `convert((10), tan)`

$$\tan(\theta) = \frac{\mu l_r}{h \mu + l} \quad (11)$$

得た式を不等式に戻します。

> `lhs((11)) ≤ rhs((11))`

$$\tan(\theta) \leq \frac{\mu l_r}{h \mu + l} \quad (12)$$

後輪駆動車の最大登坂角

後輪駆動車は、駆動力 F が以下の条件の時、登坂できます。

> $F := W \sin(\theta) \leq \mu N_R$

$$F := W \sin(\theta) \leq \mu N_R \quad (13)$$

力のモーメントを考慮した前輪の抗力：

> `NRl`

$$N_R = \frac{W (l_f \cos(\theta) + h \sin(\theta))}{l} \quad (14)$$

最大登坂角の式の導出方法は、前輪駆動車の場合と同じです。

> `eqA := convert(eval(F, NRl), equality)`

(15)

$$eqA := W \sin(\theta) = \frac{\mu W (l_f \cos(\theta) + h \sin(\theta))}{l} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} > eqB := \text{convert}\left(\frac{\text{solve}(eqA, \{\sin(\theta)\})_1}{\cos(\theta)}, \tan\right) \\ eqB := \tan(\theta) = -\frac{\mu l_f}{h \mu - l} \end{aligned} \quad (16)$$

$$> lhs(eqB) \leq rhs(eqB)$$

$$\tan(\theta) \leq -\frac{\mu l_f}{h \mu - l} \quad (17)$$

また、後輪駆動車が後転しないで登坂するには、前輪抗力 $N_F \geq 0$ である必要があります。後輪接置点を中心とする力のモーメントのつり合いの式から、以下が求められます。

$$> \tan(\theta) \leq \frac{l_r}{h} :$$

参考：導出方法

前輪抗力 $N_F \geq 0$ を定義すると、以下の式が得られます。

$$\begin{aligned} > 0 \leq rhs(NF1) \\ 0 \leq \frac{W (l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \end{aligned} \quad (18)$$

考慮する式は、以下のものとなります。

$$\begin{aligned} > 0 \leq l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta) \\ 0 \leq l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta) \end{aligned} \quad (19)$$

両辺に $h \cdot \sin(\theta)$ を足します。

$$\begin{aligned} > (19) + h \sin(\theta) \\ h \sin(\theta) \leq l_r \cos(\theta) \end{aligned} \quad (20)$$

よって、以下の式を得ます。

$$\begin{aligned} > \tan(\theta) \leq \frac{l_r}{h} \\ \tan(\theta) \leq \frac{l_r}{h} \end{aligned} \quad (21)$$

4輪駆動車の登坂角

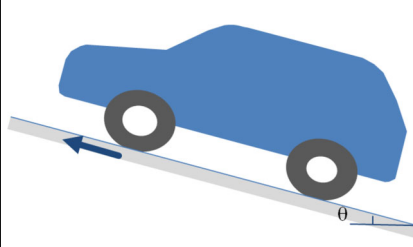
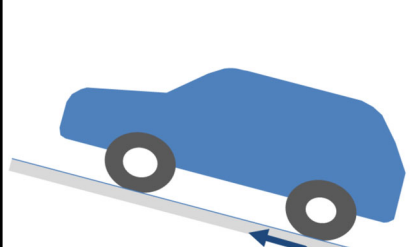
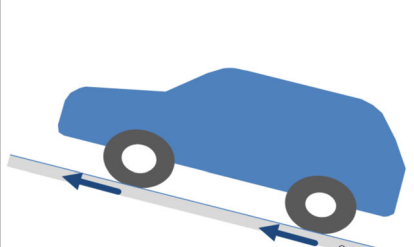
4輪駆動車の登坂の条件は $F = \mu \cdot W \cdot \cos(\theta) \geq W \cdot \sin(\theta)$ となります。よって、 $\tan(\theta) = \mu$ とな

り、最大登坂角は摩擦係数と一致します。

4輪駆動車も式 $\tan(\theta) \leq \frac{l_r}{h}$ を満たす必要があります。

最大登坂角まとめ

駆動方式と最大登坂角

前輪駆動車	後輪駆動車	4輪駆動車
$\tan(\theta) = \frac{\mu \cdot l_r}{l + \mu \cdot h}$	$\tan(\theta) = \frac{\mu \cdot l_r}{l - \mu \cdot h} \leq \frac{l_r}{h}$	$\tan(\theta) = \mu \leq \frac{l_r}{h}$
		

最大登坂角は、角度(θ) や百分率による $100 \cdot \tan \theta$ [%] などで表現される場合もあります。

このようにして、最大登坂角を求める式が得られました。

参考文献

竹原伸 (2014) 『はじめての自動車運動学 力学の基礎から学ぶクルマの動き』, 森北出版株式会社

無断転載禁止

Copyright © 2022 MAPLESOFT JAPAN CO., LTD. All rights reserved.