# Ejercicios con Sintaxis: Caso Cinemática-Dinámica

physicsleninac@hotmail.com

## Instrucciones

Para poder resolver tus ejercicios de Cinemática primero observa muy bien que es lo que hace cada comando.
Enseguida usaremos la sintaxis de maple para resolverlos.
No te olvides: después de finalizar la sistaxis en cada línea deberás presionar enter.

## Explicación: de comandos a utilizar

| Comando/Operador | ¿Qué es lo que realiza? | Ejemplo |
|---|---|---|
| **restart:** | Borra todas las variables usadas en nuestra computadora. | $restart:$<br>$x := 5;$<br>$5$ **(2.1)**<br>$x$<br>$5$ **(2.2)**<br>$restart:$<br>$x;$<br>$x$ |
| **with (VectorCalculus)** | Carga el paquete de libreria a utilizar. | $with(VectorCalculus):$ |
| **diff() - $\dot{r}$ , $\ddot{r}$**<br><br>**\$ operador para indicar el número de veces a derivar** | Calcula la derivada primera y segunda | $r := \langle t, t^2, t^3 \rangle;$<br>$(t)e_x + (t^2)e_y + (t^3)e_z$ **(2.4)**<br>$\dot{r};$<br>$e_x + 2\,te_y + 3\,t^2e_z$ **(2.5)**<br>$\ddot{r};$<br>$2e_y + 6\,te_z$ **(2.6)**<br>$diff(r, t);$<br>$e_x + 2\,te_y + 3\,t^2e_z$ **(2.7)** |

| | | |
|---|---|---|
| | | $diff(r, t\$2);$ <br> $2e_y + 6\,te_z$ |
| **Norm - || ||** | Modulo de un vector | $Norm(\mathrm{r});$ <br> $\sqrt{t^6+t^4+t^2}$ <br> $\lVert r \rVert;$ <br> $\sqrt{t^6+t^4+t^2}$ |
| **CrossProduct() - × DotProduct() - ·** | Realiza el producto vectorial y escalar respectivamente | $\langle 1, 2, 3\rangle \cdot \langle 1, 0, 0\rangle;$ <br> $1$ **(2.11)** <br> $DotProduct(\langle 1, 2, 3\rangle, \langle 1, 0, 0\rangle);$ <br> $1$ **(2.12)** <br> $\langle 1, 2, 3\rangle \times \langle 1, 0, 0\rangle;$ <br> $3e_y - 2e_z$ <br> $CrossProduct(\langle 1, 2, 3\rangle, \langle 1, 0, 0\rangle);$ <br> $3e_y - 2e_z$ |
| **eval() evalf() controla la salida de decimales** | evalua en un punto específico | $r;$ <br> $(t)e_x + (t^2)e_y + (t^3)e_z$ **(2.15)** <br> $eval\left(r, t=\frac{2}{3}\right);$ <br> $\left(\frac{2}{3}\right)e_x + \left(\frac{4}{9}\right)e_y + \left(\frac{8}{27}\right)e_z$ **(2.16)** <br> $evalf\left(eval\left(r, t=\frac{2}{3}\right), 5\right);$ <br> $(0.66667)e_x + (0.44444)e_y + (0.29630)e_z$ **(2.17)** |
| int() | integra desde un t inicial hasta un t final | $int(t^2, t);$ <br> $\frac{1}{3}\,t^3$ **(2.18)** <br> $int(t^2, t=0..1.0)$;*#integral definida* <br> $0.3333333333$ **(2.19)** |

# Sintaxis de funcionamiento

| | |
|---|---|

| Enunciado del Problema | Solución |
|---|---|
| 1.- Determina el vector velocidad, aceleración y rapidez en t = 1 y 2 segundos dado el vector posición; $r = 2\,t^2 i + \sin(t)\,j + tk$ metros. | Solución<br>$restart : with(VectorCalculus) :$<br>$r := \langle 2\cdot t^2, \sin(t), t\rangle;$<br>$2\,t^2 e_x + (\sin(t))e_y + (t)e_z$ **(3.1)**<br>$v := \dot{r};$<br>$4\,t e_x + (\cos(t))e_y + e_z$ **(3.2)**<br>$a := \ddot{r};$<br>$4e_x - \sin(t)e_y$ **(3.3)**<br>$v\_t1 := eval(v, t = 1.0)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$<br>$\frac{4.0\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}}e_x + \frac{0.5403023059\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}}e_y + \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)e_z$ **(3.4)**<br>$a\_t1 := eval(a, t = 1.0)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$<br>$\frac{4\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}e_x - \frac{0.8414709848\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}e_y$ **(3.5)**<br>$rap\_t1 := eval\left(\lVert v\rVert, t = 1.0\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$<br>$\frac{4.158356235\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **(3.6)** |
| 2.- Determine la aceleración con sus respectivos componentes; dado r = tsen(t)i+cos(t)j+tk metros. Es decir: a = a[T]T+a[N]N | Solución:<br>$restart : with(VectorCalculus) :$<br>$r := \langle t\cdot\sin(t), \cos(t), t\rangle :$<br>$T := \frac{\dot{r}}{\lVert\dot{r}\rVert} :$<br>$N := \frac{\dot{T}}{\lVert\dot{T}\rVert} :$<br>$aT := \frac{(\dot{r}\cdot\ddot{r})}{\lVert\dot{r}\rVert} :$<br>$aN := \frac{\lVert\dot{r}\times\ddot{r}\rVert}{\lVert\dot{r}\rVert} :$<br>$a := aT\cdot T + aN\cdot N :$<br>$a\_t1 := eval(a, t = 1.0)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$<br>$\frac{0.2391336273\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}e_x - \frac{0.5403023059\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}e_y + (0.)e_z$ **(3.7)**<br>$aT\_t1 := eval(aT, t = 1.0)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$<br>$\frac{0.4127773253\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ **(3.8)**<br>$aN\_t1 := eval(aN, t = 1.0)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$ |

$$\frac{0.4227603971\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \textbf{(3.9)}$$

$T\_t1 := eval(T, t = 1.0);$

$$(0.7265077922)e_x + (-0.4424280244)e_y + (0.5257792989)e_z \qquad \textbf{(3.10)}$$

$N\_t1 := eval(N, t = 1.0);$

$$(-0.1437038956)e_x + (-0.8460538209)e_y + (-0.5133635370)e_z \qquad \textbf{(3.11)}$$

$aT := aT\_t1 \cdot T\_t1 + aN\_t1 \cdot N\_t1;$

$$\frac{0.2391336273\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} e_x - \frac{0.5403023058\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} e_y - \frac{1.\ 10^{-10}\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} e_z \qquad \textbf{(3.12)}$$

3.-
Determine la curvatura; dado el vector posición: $r = t\cos(t)\,i + \exp(t)\,j + tk$ metros en t = 0.5 y 1.0 segundos.

$restart : with(VectorCalculus) :$

$r := \langle$ [illegible] $\mathrm{p}(t), t\rangle :$

$$\kappa := \frac{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}{\|\dot{r}\|^3} :$$

$eval(\kappa, t = 0.5);$

$$0.4764378897 \qquad \textbf{(3.13)}$$

$eval(\kappa, t = 1.0);$

$$0.2549387013 \qquad \textbf{(3.14)}$$

4.-
Calculese la longitud de la curva s si el vector posición describe una trayactoria C: $r = 5\exp(t)\,i + sen(t)\,j + t^2 k$ metros.
desde 0 hasta 6.28 segundos.

$restart : with(VectorCalculus) :$

$r := \langle 5 \cdot \exp(t), \sin(t), t^2\rangle :$

$s := int(\|\dot{r}\|, t = 0..6.28)\,\mathrm{m};$

$$2664.760663\ \mathrm{m} \qquad \textbf{(3.15)}$$

$restart : with(VectorCalculus) :$

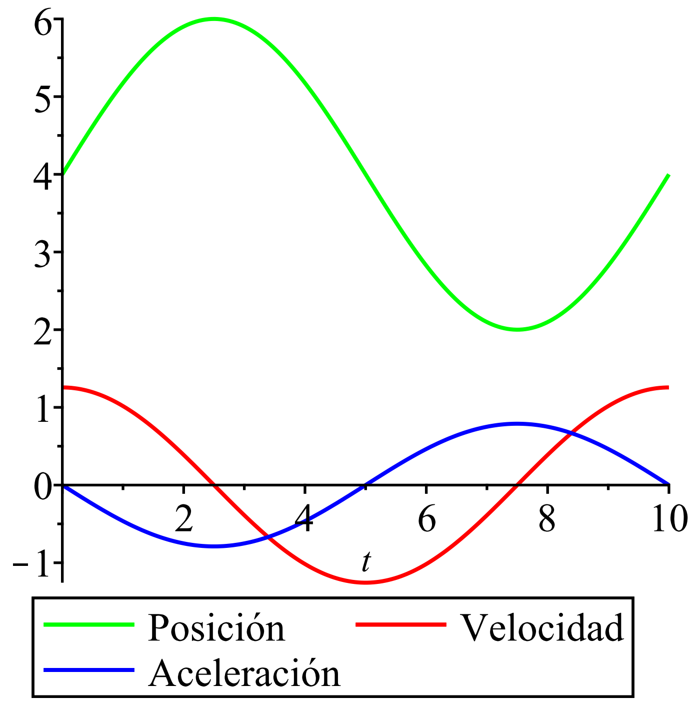
$r := \langle t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t), t\rangle :$

$$T := \frac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|} :$$

| | |
|---|---|
| 5.- Hallar el vector Binormal si: r = tcos(t)i+tsin(t)j+tk en t = 0.0 y 1.0 segundos. | $N := \frac{\dot{T}}{\Vert \dot{T} \Vert}$ :<br>$B := T \times N$ :<br>$eval(B, t = 0.0)$;<br>$(-0.7071067819)e_x + (0.)e_y + (0.7071067819)e_z$ **(3.16)**<br>$eval(B, t = 1.0)$;<br>$(-0.06391115026)e_x + (-0.5941870261)e_y + (0.8017837259)e_z$ **(3.17)**<br>$eval(\Vert B \Vert, t = 1.0)$;# *para todo t≥0 segundos*<br>1 **(3.18)** |

# Ejercicios desarrollados

| | |
|---|---|
| 1.- Si s = [2 sen(π/5)t + 4] m, donde t está en segundos, define la posición de una partícula, trace las gráficas de s-t, v-t y a-t durante el intervalo 0 ≤ t ≤10 s. | Usaremos:<br>*restart* : *with*(*plots*) :<br>$s := 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right) + 4$ :<br>$v := \dot{s}$ :<br>$a := \ddot{s}$ :<br>*gpos* := *plot*(*s*, *t* = 0 ..10, *color* = *green*, *legend* = ["Posición"]) :<br>*gvel* := *plot*(*v*, *t* = 0 ..10, *color* = *red*, *legend* = ["Velocidad"]) :<br>*gacl* := *plot*(a, t = 0 ..10, color = blue, *legend* = ["Aceleración"]) :<br>*display*(*gpos*, *gvel*, *gacl*); |




2.-
Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria parabólica y = bx^2. Si su componente de velocidad a lo
largo del eje y es vy = ct^2, determine los componentes x y y de la aceleración de la partícula. En este caso b y c son constantes.

$dy = v_y \cdot dt$ porque el mopvimiento es a lo largo del eje y

$restart:$

$v_y := c \cdot t^2;$

$$c\,t^2 \qquad \textbf{(4.1)}$$

$y := int(v_y, t);$

$$\frac{1}{3}\,c\,t^3 \qquad \textbf{(4.2)}$$

como $y = b \cdot x^2$ entonces igualamos:

$b \cdot x^2 = \frac{1}{3} \cdot c \cdot t^3$

$$b\,x^2 = \frac{1}{3}\,c\,t^3 \qquad \textbf{(4.3)}$$

$solve(\textbf{(4.3)}, x)[1]$

$$\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{b\,c\,t}\,t}{b} \qquad \textbf{(4.4)}$$

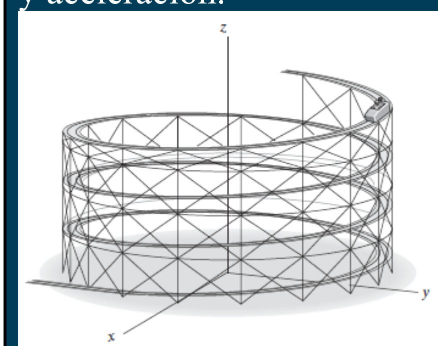
$x := solve(\textbf{(4.3)}, x)[1]$#*solo solución positiva*

$$\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{b\,c\,t}\,t}{b} \qquad \textbf{(4.5)}$$

| | |
|---|---|
| | $v_x := simplify(\dot{x})\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$<br>$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}\,t\,c\,\mathrm{m}}{\sqrt{b\,c\,t}\,\mathrm{s}} \qquad \textbf{(4.6)}$$<br>$a_x := simplify(\ddot{x})\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$<br>$$\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{3}\,c\,\mathrm{m}}{\sqrt{b\,c\,t}\,\mathrm{s}^2} \qquad \textbf{(4.7)}$$<br>$a_y := simplify(\ddot{y})\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$<br>$$\frac{2\,c\,t\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \textbf{(4.8)}$$ |
| 3.-<br>Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria circular x^2 + y^2 = r ^2. Si el componente y de la velocidad de la partícula es vy = 2r cos 2t, determine los componentes x y y de su aceleración en cualquier instante. | $dy = v_y dt$<br>$restart:$<br>$v_y := 2\cdot r\cdot\cos(2\cdot t);$<br>$$2\,r\cos(2\,t) \qquad \textbf{(4.9)}$$<br>$y := int(v_y, t);$<br>$$r\sin(2\,t) \qquad \textbf{(4.10)}$$<br>dato del problema:<br>$x^2 + y^2 = r^2$ sustituimos en ésta ecuación; el último resultado:<br>$x^2 + (y)^2 = r^2;$<br>$$x^2 + r^2\sin(2\,t)^2 = r^2 \qquad \textbf{(4.11)}$$<br>$x := solve(\textbf{(4.11)}, x)[1];$<br>$$\sqrt{1-\sin(2\,t)^2}\;r \qquad \textbf{(4.12)}$$<br>$v_x := \dot{x}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$<br>$$-\frac{2\,r\sin(2\,t)\,\cos(2\,t)\,\mathrm{m}}{\sqrt{1-\sin(2\,t)^2}\,\mathrm{s}} \qquad \textbf{(4.13)}$$<br>$a_x := \ddot{x}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$<br>$$\frac{1}{\mathrm{s}^2}\left(\left(-\frac{4\,r\sin(2\,t)^2\cos(2\,t)^2}{\left(1-\sin(2\,t)^2\right)^{3/2}} - \frac{4\,r\cos(2\,t)^2}{\sqrt{1-\sin(2\,t)^2}} + \frac{4\,r\sin(2\,t)^2}{\sqrt{1-\sin(2\,t)^2}}\right)\mathrm{m}\right) \qquad \textbf{(4.14)}$$<br>$a_y := \dot{v}_y\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$<br>**(4.15)** |

$$-\frac{4\, r \sin(2\, t)\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \textbf{(4.15)}$$

4.-
El carro de la montaña rusa desciende por la trayectoria helicoidal a velocidad constante de modo que las ecuaciones paramétricas que definen su posición son x = c sen kt, y = c cos kt, z = h - bt, donde c, h y b son constantes. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración.




Solución:
$restart : with(VectorCalculus) :$
$r := \langle c \cdot \sin(k \cdot t), c \cdot \cos(k \cdot t), h - b \cdot t \rangle;$

$$(c \sin(k\, t))e_x + (c \cos(k\, t))e_y + (-b\, t + h)e_z \qquad \textbf{(4.16)}$$

$v := \dot{r}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$\left(\frac{\mathrm{m}\ c \cos(k\, t)\ k}{\mathrm{s}}\right)e_x - \frac{\mathrm{m}\ c \sin(k\, t)\ k}{\mathrm{s}}e_y - \frac{\mathrm{m}\ b}{\mathrm{s}}e_z \qquad \textbf{(4.17)}$$

$a := \ddot{r}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$-\frac{\mathrm{m}\ c \sin(k\, t)\ k^2}{\mathrm{s}^2}e_x - \frac{\mathrm{m}\ c \cos(k\, t)\ k^2}{\mathrm{s}^2}e_y \qquad \textbf{(4.18)}$$

$simplify(\, \| v \| \,);$

$$\sqrt{c^2\, k^2 + b^2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \textbf{(4.19)}$$

$simplify(\, \| a \| \,);$

$$\sqrt{c^2\, k^4}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \textbf{(4.20)}$$

5.-
En la figura, la masa de A es de 30 kg y la masa de B es
de 5 kg. El coeficiente de fricción cinética entre A y la superficie horizontal es $\mu_k = 0.2$ . La fuerza constante F ocasiona que el sistema se acelere. El ángulo θ = 20° es constante. Determine F.

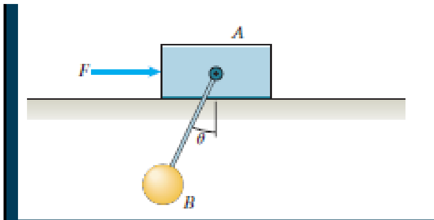
Solución:

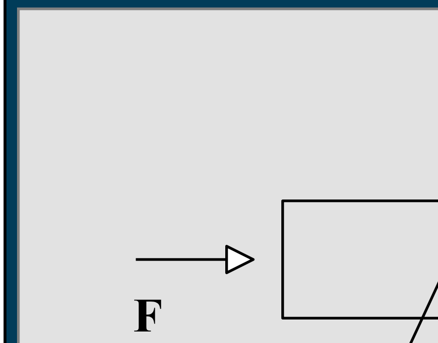
$restart :$
$\theta := convert(20\ degrees, radians) :$
$\mu_k := 0.2 :$
$m_A := 30 \cdot \mathrm{kg} :$
$m_B := 5 \cdot \mathrm{kg} :$
$g := 9.81 \cdot \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} :$

$\sum F_{xA} :$
$eq1 := F - T \cdot \sin(\theta) = m_A \cdot a;$

$$F - T \sin\left(\frac{1}{9}\, \pi\right) = 30\ \mathrm{kg}\ a \qquad \textbf{(4.21)}$$

$\sum F_{yA} :$




(4.21)

$eq2 := N - T \cdot \cos(\theta) - m_A \cdot g = 0;$

$$N - T\cos\left(\frac{1}{9}\pi\right) - \frac{294.30\ \mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2} = 0 \qquad (4.22)$$

$\sum F_{xB}$ :

$eq3 := T \cdot \sin(\theta) = m_B \cdot a;$

$$T\sin\left(\frac{1}{9}\pi\right) = 5\ \mathrm{kg}\ a \qquad (4.23)$$

$\sum F_{yB}$ :

$eq4 := T \cdot \cos(\theta) - m_B \cdot g = 0;$

$$T\cos\left(\frac{1}{9}\pi\right) - \frac{49.05\ \mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2} = 0 \qquad (4.24)$$

$evalf(solve(\{eq1, eq2, eq3, eq4\}, \{F, T, N, a\}), 3);$

$$\left\{F = \frac{125.\ \mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}, N = \frac{343.\ \mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}, T = \frac{52.2\ \mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}, a = \frac{3.57\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right\} \qquad (4.25)$$