Optimización: Una introducción intuitiva-gráfica al problema

Dr. Ranferí Gutiérrez
matematicaurl@gmail.com

Introducción

Uno de los temas que presenta mayor dificultad para el estudiante novato de Cálculo diferencial es el de optimización. Las dificultades van desde la construcción de la función que modela un problema aplicado particular, hasta la comprensión y aplicación del proceso analítico para encontrar el valor que maximiza o minimiza la misma, según corresponda.

En esta guía electrónica se presenta el tema de la optimización de una función desde un punto de vista intuitivo, apoyándose en las capacidades de Maple para crear gráficas interactivas, con el objetivo de que el estudiante adquiera una mejor comprensión de lo que significa optimizar una función. Se deja para el desarrollo en el aula el analizar los problemas de optimización de una función utilizando el concepto de derivada.

Durante el desarrollo de esta guía se estudian tres problemas aplicados, en los cuales se enfatizan los siguientes pasos para resolverlos:

1. Construcción de la función que modela el problema.
2. Determinación del dominio de la función, de acuerdo a las condiciones del problema.
3. Búsqueda de el valor máximo o mínimo de la función en la gráfica de la misma.

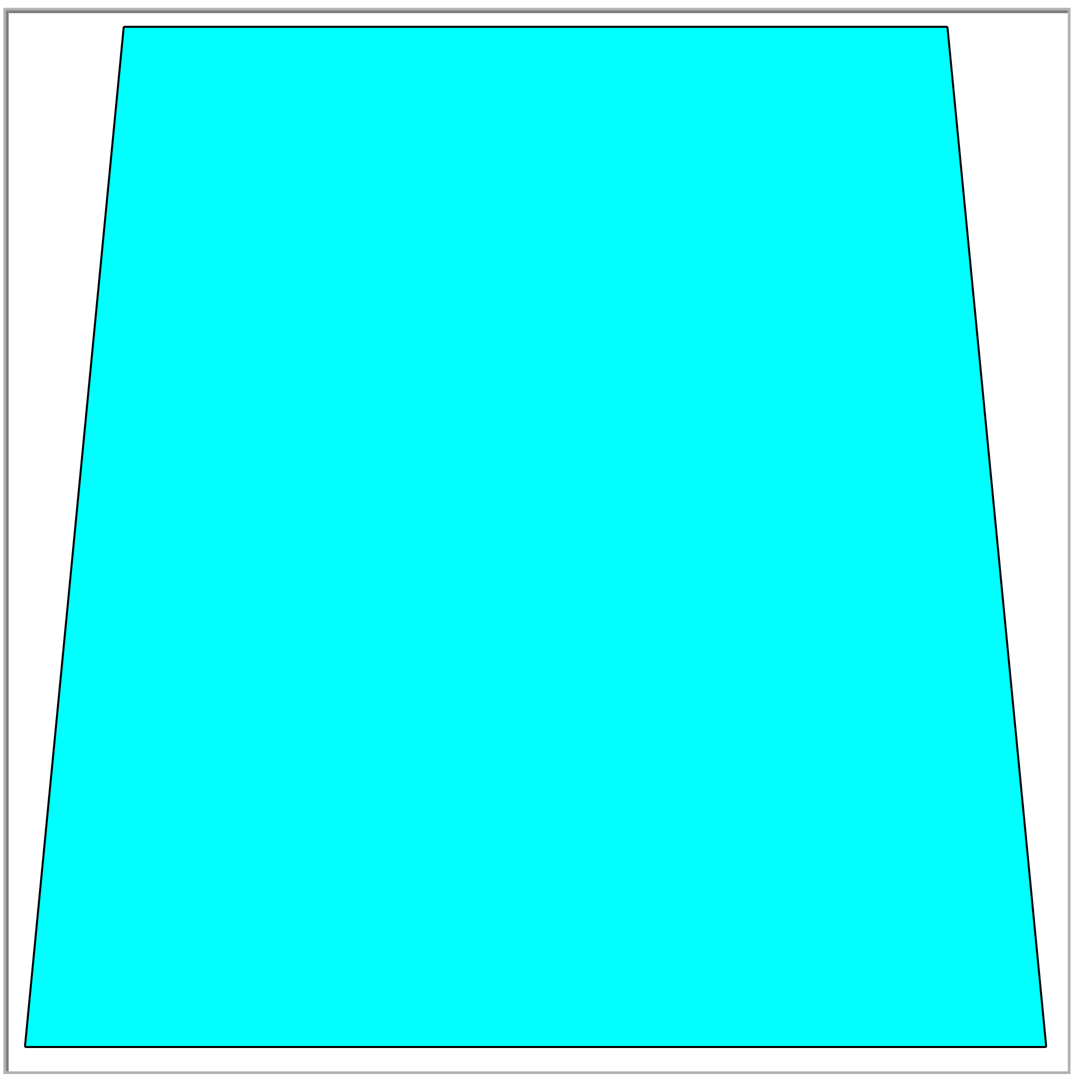
Los comentarios al final de cada problema ayudan al estudiante a reconocer los aspectos generales más importantes de los problemas de optimización y esto, aunado con el análisis detallado de las gráficas interactivas que encontrará en esta guía, lo prepararán para afrontar con mayor éxito problemas de optimización que requieran la aplicación del concepto de derivada, así como comprender mejor los criterios para determinar si en un punto dado la función tiene un máximo o un mínimo.

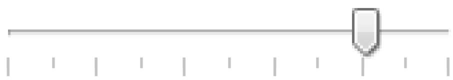
Problema aplicado 1: Un problema de juguete sobre optimización

En esta sección usted encontrará un problema *de juguete* con el cual podrá comprender de manera intuitiva lo que significa resolver un problema de optimización en cálculo, así como familiarizarse con la terminología y procedimiento de análisis que se realiza en este tipo de problemas.

Una figura muy traviesa

Suponga que tiene una figura con base inferior y altura constantes y de igual longitud, pero con una base superior cuya dimensión puede variarse, tal como se muestra en la figura de abajo.   Mueva la barra deslizante para ver cómo cambia la forma de la figura al variar el tamaño de la base superior.





Note que la figura, en general, corresponde a un trapecio, el cual puede convertirse en un triángulo o en un cuadrado, como casos límites al variar al mínimo o al máximo, respectivamente, la dimensión de la base superior.

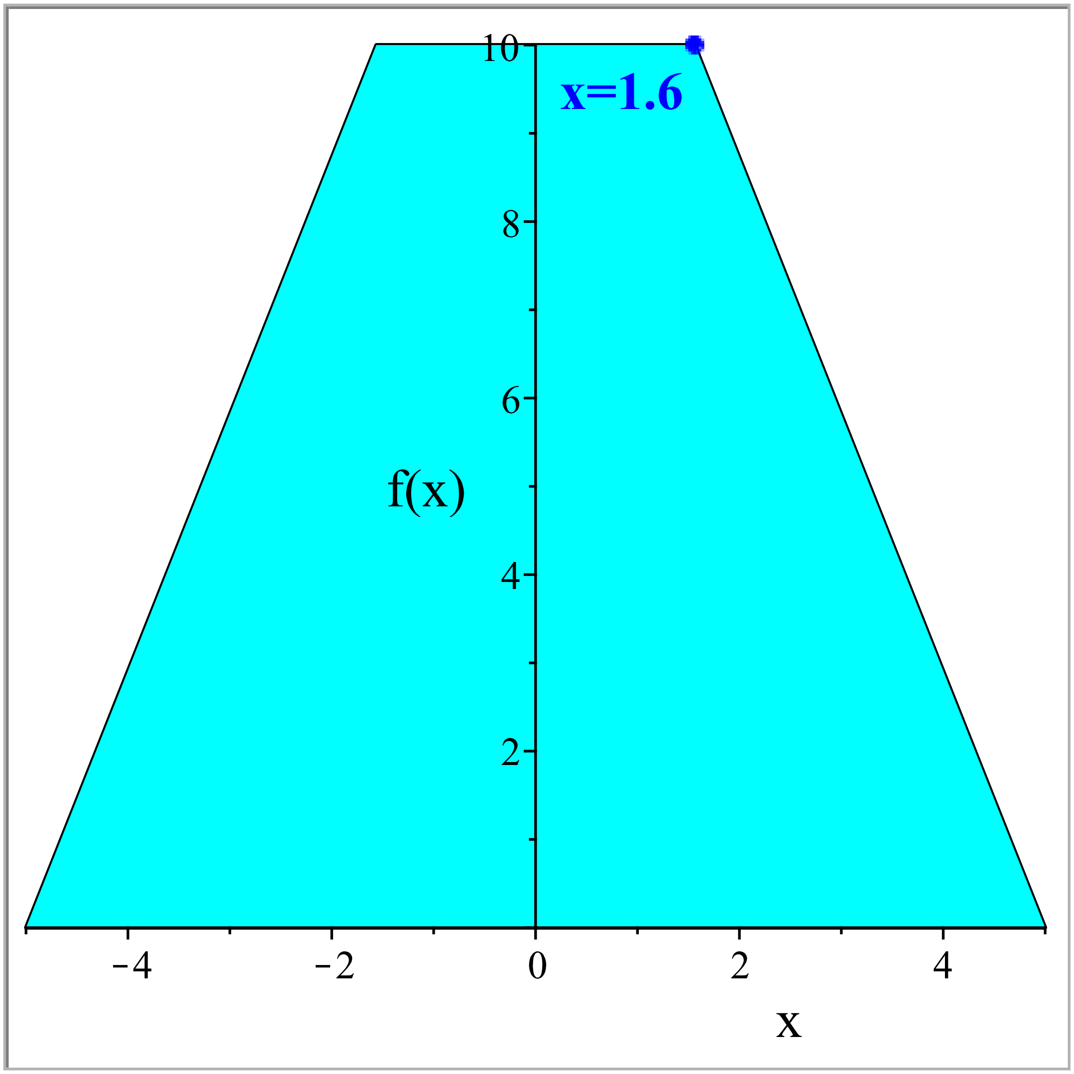
¿Cuál es el valor de área más pequeña y de área más grande que puede obtenerse con la figura de arriba? Suponga que la base inferior y la altura tienen, cada una, un tamaño de 10 u.

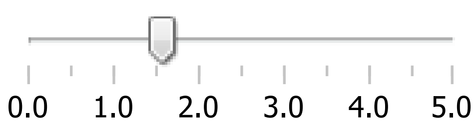
Solución

Es obvio que el área más pequeña corresponde al caso extremo en que se forma un triángulo, mientras que el área más grande corresponde al caso extremo en que se forma un cuadrado. El área más pequeña que se puede obtener con la figura de arriba tiene un valor $A_{\text{min}} = \frac{1}{2}(10)(10) = 50\,u^2$, mientras que el área más grande tiene un valor $A_{\text{max}} = (10)(10) = 100\,u^2$.

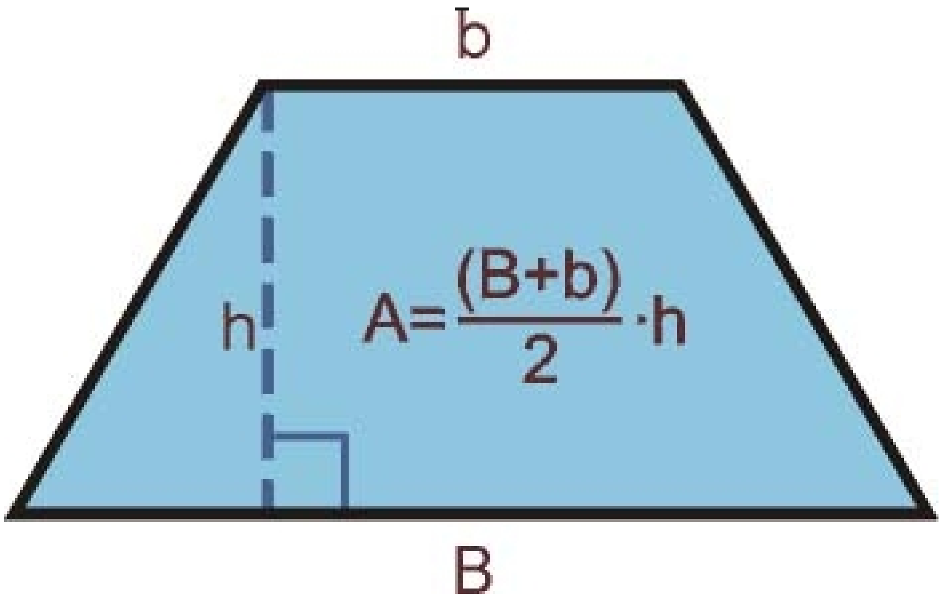
Ahora daremos un paso más y utilizaremos conceptos del curso de Pre-cálculo para obtener una función que modele el área de la figura traviesa y luego encontrar en forma gráfica los valores A_{min} y A_{max} indicados en el párrafo anterior:

Comenzaremos introduciendo un sistema de coordenadas, como se ilustra en la figura de abajo. Observe que en la figura de abajo se ha denotado con x la coordenada del punto en el extremo superior derecho (el punto azul).





Por otro lado, en la figura de abajo se muestra un trapecio y la fórmula que permite calcular su área:



Note que si $b = 0$, el trapecio *se convierte* en un triángulo, y en este caso la fórmula para calcular el área de un trapecio se reduce a la fórmula para calcular el área de un triángulo: $A = \frac{1}{2}Bh.$

Por otro lado, si $b = B$, el trapecio se convierte en un rectángulo, y en este caso la fórmula para calcular el área de un trapecio se reduce a la fórmula para calcular el área de un rectángulo: $A = \frac{(B+B)}{2}h = Bh.$ Esto justifica la utilización de la fórmula del área de un trapecio para nuestro *problema de juguete*.

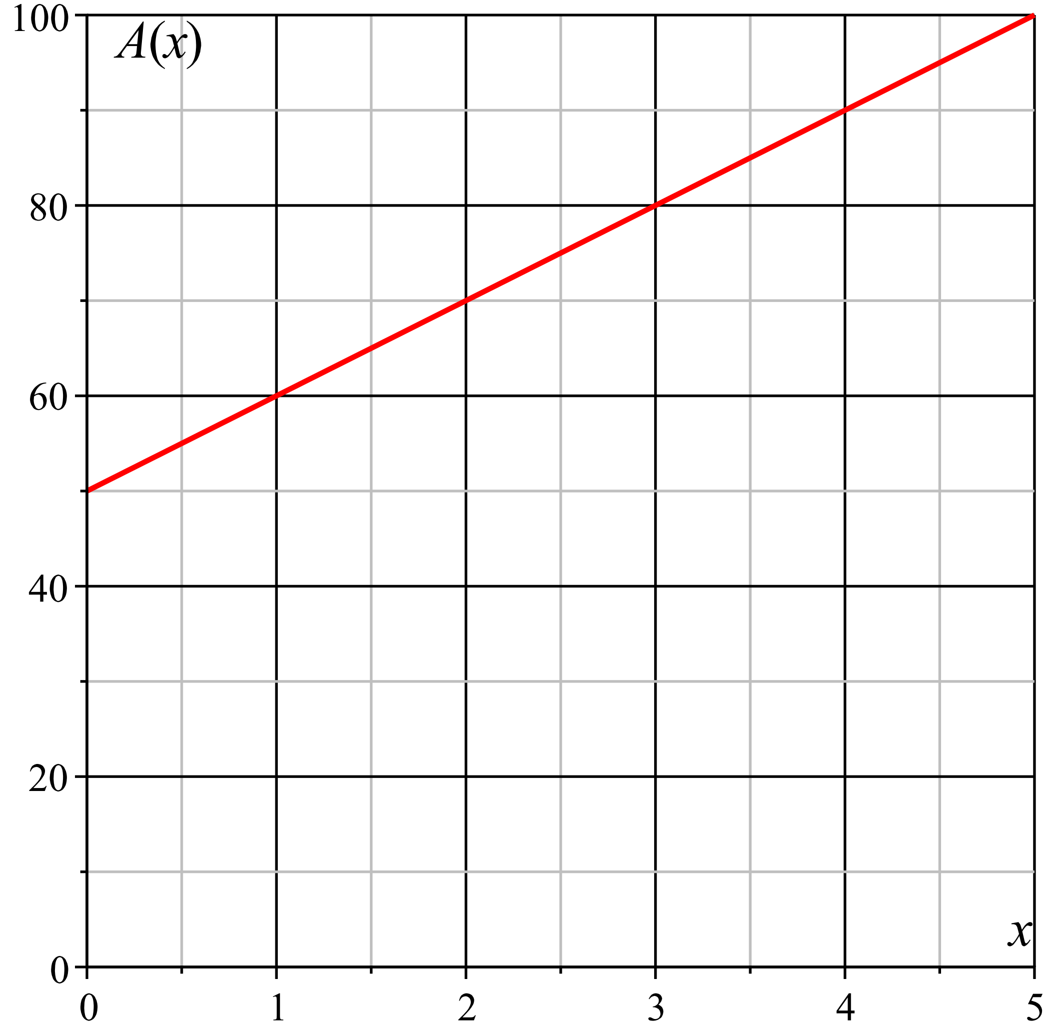
Ahora construiremos una función $A(x)$ que permita calcular el área de la figura traviesa. En nuestro caso, $B = 10$ y $h = 10$; además, $b = 2\,x$.

La función que permite calcular el área de la figura traviesa es

$$A(x) = \left(\frac{10 + 2\,x}{2}\right)(10) = 50 + 10\,x$$

Ahora determinaremos el dominio de la función $A(x) : \{x \mid 0 \le x \le 5\}$. Sabemos que el caso $x = 0$ corresponde al triángulo, mientras que el caso $x = 5$ corresponde al cuadrado.

Abajo se muestra la gráfica de $A(x)$, en el dominio admisible para nuestro problema de juguete:



Ahora buscaremos en la gráfica los valores máximo y mínimo de la función, dentro del dominio admisible para la misma: De la gráfica de arriba es claro que el valor mínimo del área corresponde a $x = 0$: $A_{\min} = A(0) = 50\ u^2$, mientras que el valor máximo del área corresponde a $x = 5$: $A_{\max} = A(5) = 100\ u^2$.

Comentarios: Este problema de juguete muestra la esencia de lo que significa en cálculo resolver un problema de optimización: Buscar, restringidos a las condiciones del problema, el valor máximo o mínimo de cierta cantidad de interés.

En los textos resaltados en color verde se muestran los pasos básicos de análisis que hay que realizar en los problemas de optimización:

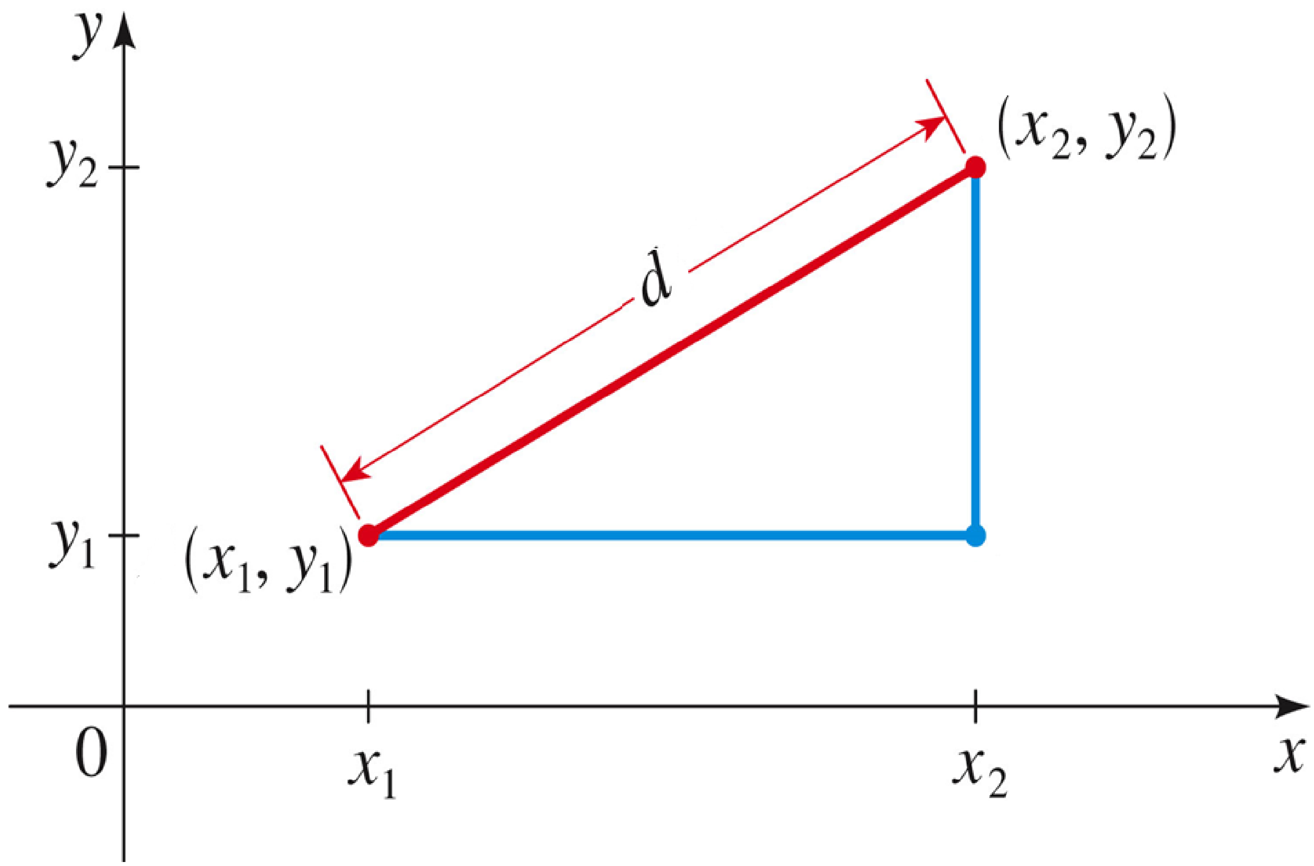
1. ***Construir una función que permita calcular de forma general la cantidad que se quiere maximizar o minimizar.*** Con frecuencia esto necesitará de introducir un sistema de coordenadas, aunque no es una regla general. En ocasiones se pueden utilizar fórmulas conocidas, como por ejemplo de geometría; en otros casos usted deberá deducir la función.
2. ***Determinar el dominio de la función que se contruyó en el paso anterior.*** Este paso es importante ya que el problema impondrá de forma implícita, o explícita, límites que tengan sentido para la variable independiente. Por ejemplo, en el problema de juguete, la función $A(x) = 50 + 10\,x$ admite, matemáticamente hablando, valores $-\infty < x < \infty$, pero es claro que en este caso, los únicos valores que tienen sentido son aquellos que pertenecen al intervalo $[0,\,5]$.
3. ***Determinar el valor máximo o mínimo de la función, según corresponda.*** En esta guía, la determinación de los valores extremos de la función se realizará a partir de la observación de su gráfica. En clase usted aprenderá métodos analíticos que permiten calcular en forma precisa los valores extremos de dicha función.

Problema aplicado 2: Distancia más corta del origen a un punto de la gráfica de una función

En este problema se trata de determinar la distancia más corta que hay desde el origen hasta un punto que pertenece a la gráfica de una función dada. Para resolver este problema es importante recordar que la distancia d entre dos puntos $(x_1,\,y_1)$ y $(x_2,\,y_2)$ está dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

En la figura de abajo se ilustra las variables involucradas en (1).



Problema ejemplo

(a) Construya la función $d(x)$ que permite calcular la distancia desde el origen hasta un punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$. Determine el dominio de $d(x)$, adecuado para este problema .
(b) Construya la gráfica de la función $d(x)$ y utilícela para determinar la distancia más corta desde el origen hasta un punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$.

Solución

(a) En la figura de abajo se muestra la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$, un punto arbitrario (x, y) sobre la misma y un segmento que lo une al origen.

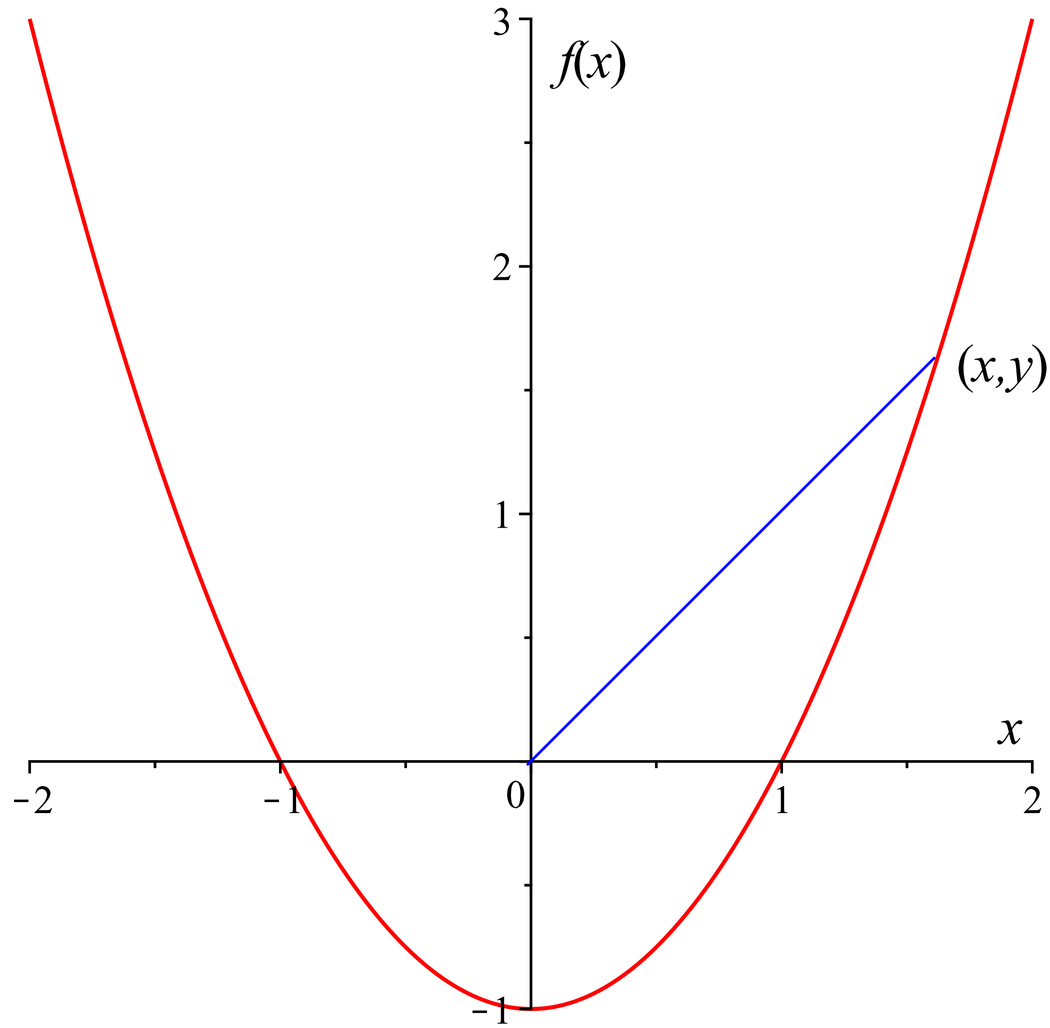


Figura 1. Gráfica de $y = x^2 - 1$, en color rojo, y de un segmento (en color azul) que une al orígen de coordenadas con un punto (x, y) de la parábola.

Asignando los puntos $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y $(x_2, y_2) = (x, x^2 - 1)$ -recuerde que $y = x^2 - 1$- entonces la aplicacion de (1) da como resultado que la función buscada es

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2}$$

la cual equivale a

$$d(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \qquad (2)$$

El dominio de la función (2) corresponde a todos los reales ya que $y_1 = x^4 - x^2 + 1$ siempre es positiva, tal como se ilustra en la figura de abajo:

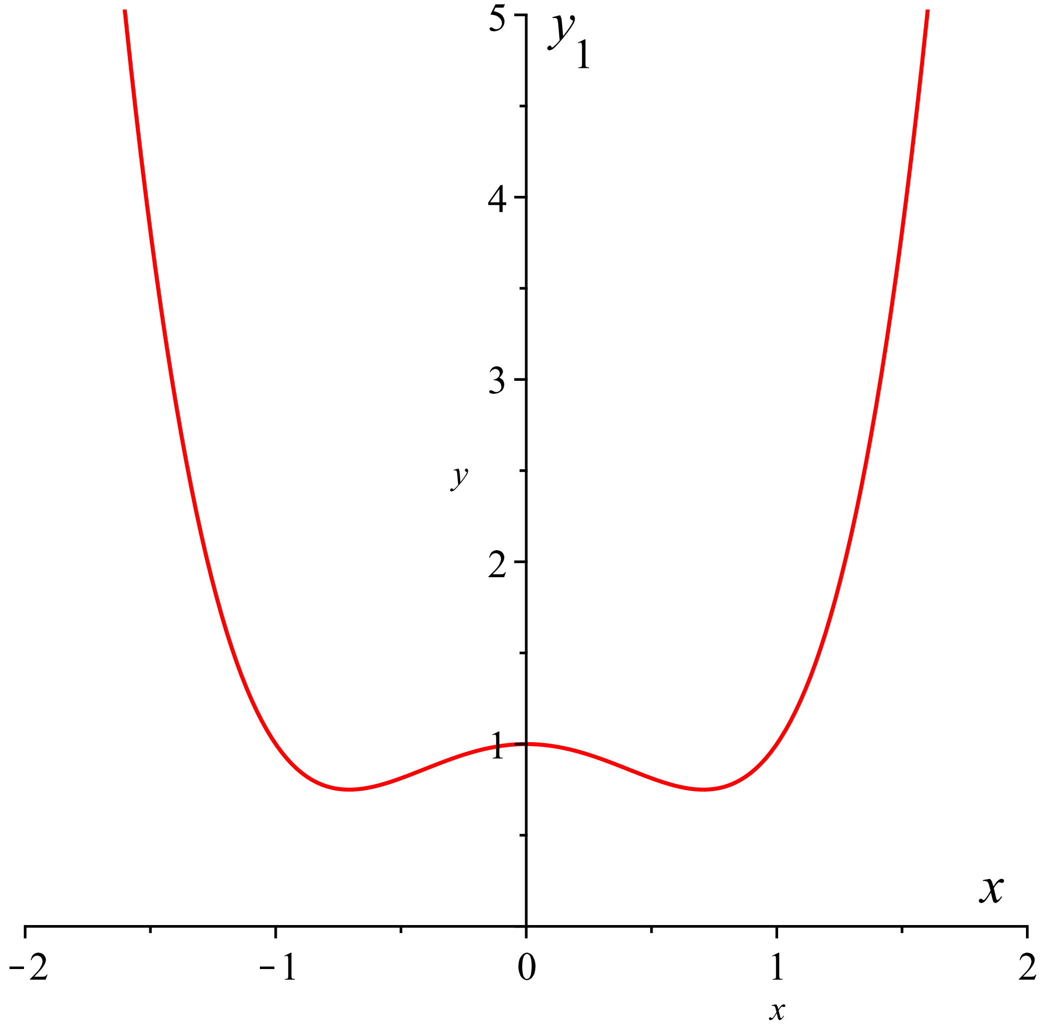


Figura 2. Gráfica de $y_1 = x^4 - x^2 + 1$.

Además, recuerde que el punto (x, y) cuya distancia al origen se quiere minimizar pertenece a la parábola $y = x^2 - 1$, la cual admite valores $-\infty < x < \infty$.

(b) Para determinar el valor de la distancia mas corta desde el origen a cualquier punto (x, y) que pertenece a $y = x^2 - 1$ construiremos, tal como lo pide el problema, la gráfica de la función

$d(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$.

Para lograr una mejor comprensión de lo que está realizando al buscar la distancia más corta que pide el problema, abajo encontrará dos gráficas: La Figura 3 es similar a la Figura 1, salvo que ahora se puede modificar la posición del punto (x, y) mediante la barra deslizante abajo de esa figura. La Figura 4 muestra el valor de la distancia entre el punto (x, y) seleccionado en la Figura 3, y el origen. Mueva las barras deslizantes en ambas figuras y trate de comprender la información que está proporcionando cada gráfica.

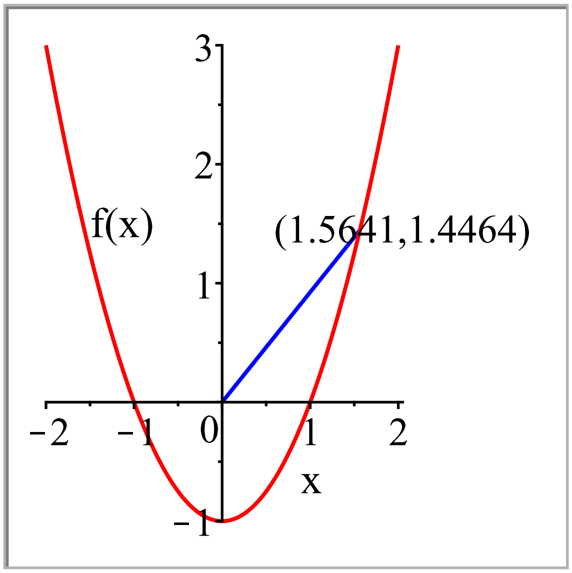
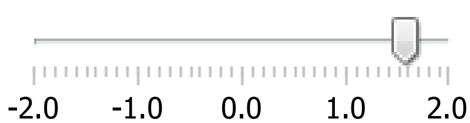


Figura 3. Gráfica de $f(x) = x^2 - 1$. La barra deslizante de abajo permite seleccionar diferentes puntos sobre la parábola.

f(1.564

)= 1.446

x=



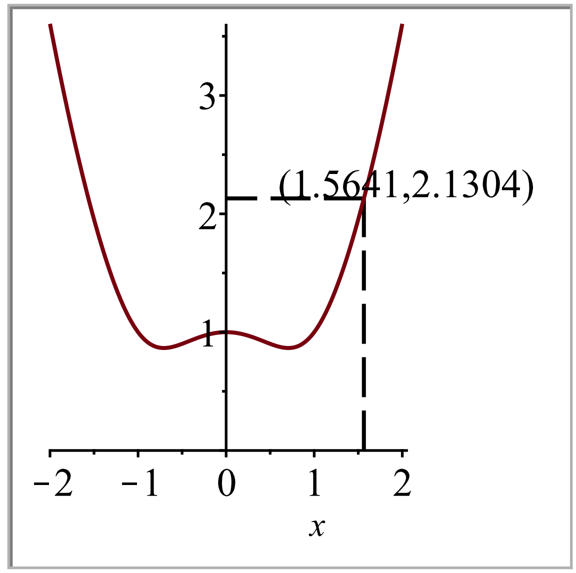


Figura 4. Gráfica de $d(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$. La coordenada vertical proporciona la distancia entre elorigen y el punto seleccionado en la figura de la izquierda.

d(

1.564)= 2.130

Observe que tanto en la Figura 3 como en la Figura 4 se muestran las coordenadas del punto correspondiente en cada gráfica. Note que, en ambas gráficas, la coordenada x de cada punto es la misma, mientras que la segunda coordenada del par es diferente en cada una de ellas. ¿Qué represente la segunda coordenada en cada uno de los puntos de las Figuras 3 y 4?

Solución

En la Figura 3 la segunda coordenada del punto proporciona el valor de $f(x)$, mientras que en la Figura 4, la segunda coordenada del punto indica la distancia $d(x)$ entre el origen y el punto $(x, f(x))$ de la Figura 3. ¡Asegúrese de comprender esto bien!

Al mover la barra deslizante que está abajo de la Figura 3 cambia el valor de la coordenada x en ambas gráficas. Por ejemplo, mueva la barra y observe que si $x = 0.7500$, en la gráfica de la izquierda el segmento de línea azul va desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(0.7500, -0.4375)$, mientras que en la figura de la derecha, las coordenadas $(0.7500, 0.8683)$ indican que la distancia entre los puntos de la figura de la izquierda es $d(0.7500) = 0.8683$ u.

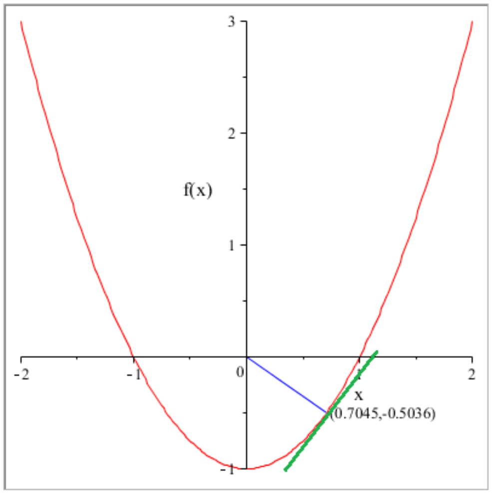
Mueva la barra deslizante hasta encontrar la mínima distancia entre el punto $(0, 0)$ y un punto (x, y) de la gráfica de $y = x^2 - 1$ -recuerde que la gráfica de la derecha le servirá para encontrar la distancia mínima-. ¿Es único ese punto? ¿Por qué?

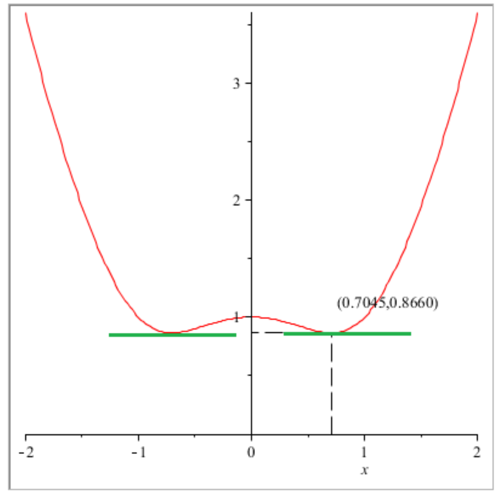
Solución

En este caso, dada la simetría que se observa en la gráfica de la izquierda, hay dos puntos cuya distancia es mínima; las coordenadas de los puntos son (0.7045,-0.5036) y (-0.7045,-0.5036). La distancia mínima es de 0.8660 u.

Observe que la distancia mínima entre los puntos de la Figura 3 corresponde a los puntos mínimos en la Figura 4. ¿Comprende por qué es así esto?

Note también que en la Figura 4, en cada uno de los puntos donde la función toma sus valores mínimos, se puede trazar rectas tangentes horizontales; en cambio, en el punto (x, y) de la Figura 3 donde la distancia es mínima al origen, aunque puede trazarse una recta tangente, ésta no es horizontal. Observe en las figuras de abajo los segmentos de recta color verde:





Comentarios: Este ejemplo, de mayor dificultad al del problema de juguete, requirió nuevamente de seguir los pasos básicos de análisis que hay que realizar en los problemas de optimización, y que fueron resaltados en color verde en la sección **Problema aplicado 1: Un problema de juguete sobre optimización.** Trate de identificar cada uno de esos pasos básicos en el problema anterior de distancia.

Nuevamente, en este problema se ha recurrido al análisis gráfico para resolver el problema de optimización. Esto se ha hecho así con fines de que usted adquiera una comprensión gráfica del proceso, lo cual será de mucha ayuda cuando aprenda cómo resolver problemas de optimizacion utilizando métodos analíticos.

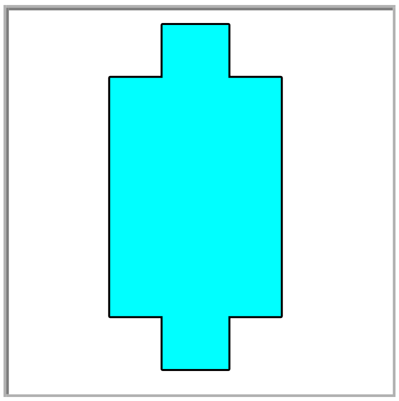
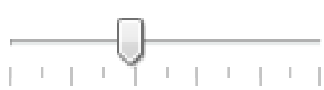
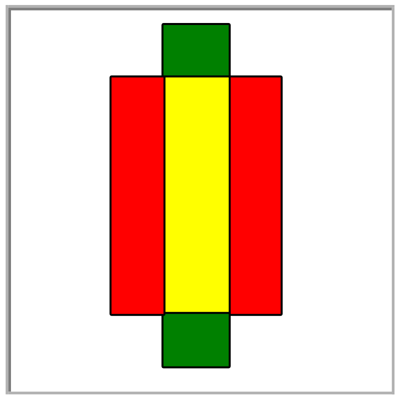
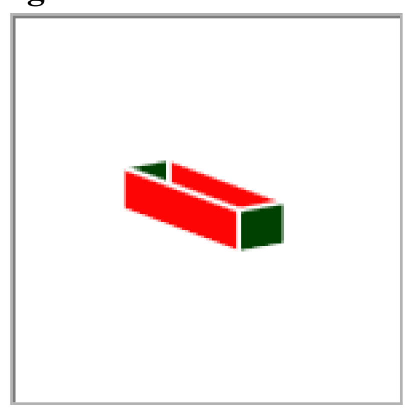
Observe que en este caso la función que se está minimizando, $d(x)$, tiene la característica de que en los puntos donde se alcanzan valores mínimos pueden trazarse rectas horizontales. El valor de x que minimiza la distancia no se encuentra en los extremos, tal como sucedió en el problema de juguete. Note también lo relacionado con la simetría del problema y la existencia de dos valores mínimos para este problema.

Problema aplicado 3: Volumen máximo de una caja construída a partir de una lámina

Ahora estudiará un problema clásico del cálculo diferencial: Encontrar el volumen máximo de una caja, sin tapadera, que se forma al cortar cuadrados de las esquinas de una lámina y luego doblar los lados.

Abajo se muestran tres figuras: En la figura del extremo izquierdo puede ver la forma que adquiere la lámina cuando se varía el tamaño del cuadrado que se corta en cada una de sus esquinas; con la barra deslizante puede variar el tamaño de los cuadrados.

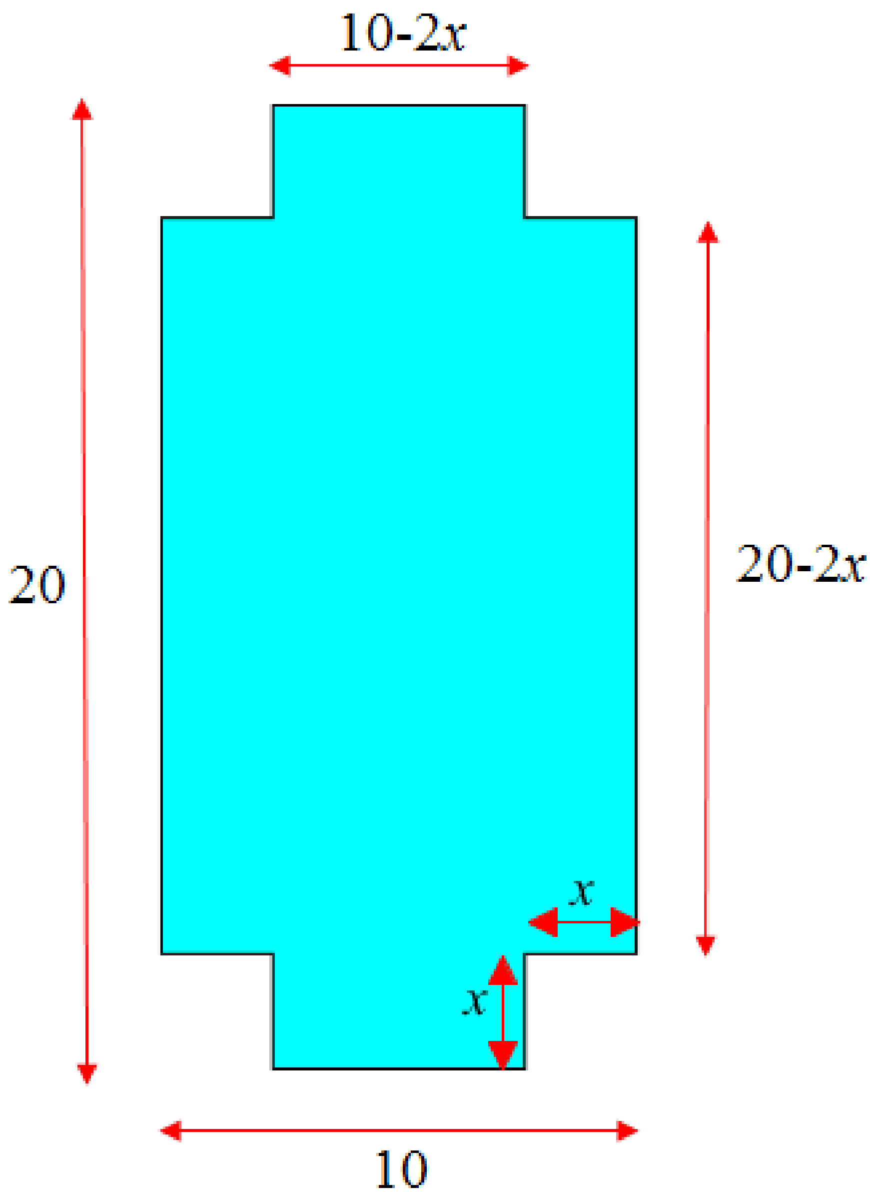
En la figura del centro se muestra la misma lámina, pero ahora se han coloreado, para su comodidad, cada uno de los lados de la caja que se forma al doblar la lámina. En la figura del extremo derecho puede observar la forma final de la caja. Note que puede rotar la caja del extremo derecho para observarla desde diferentes ángulos.

 **Mueva la barra deslizante para variar el tamaño de los cuadrados que se recortan en cada una de las esquinas de la lámina.** 		**Coloque el ratón sobre la figura de abajo, y mientras mantiene presionado el botón izquierdo, puede rotar la caja. Si la figura no rota, presione el botón**  **que aparece en el menú y luego rote la figura.** 

Suponga que la caja la va a construir a partir de una lámina que mide 20 u de largo y 10 u de ancho. A continuación se indican los tres pasos básicos sugeridos en esta guía para resolver gráficamente el problema:

▼ Construcción de la función que modela el problema

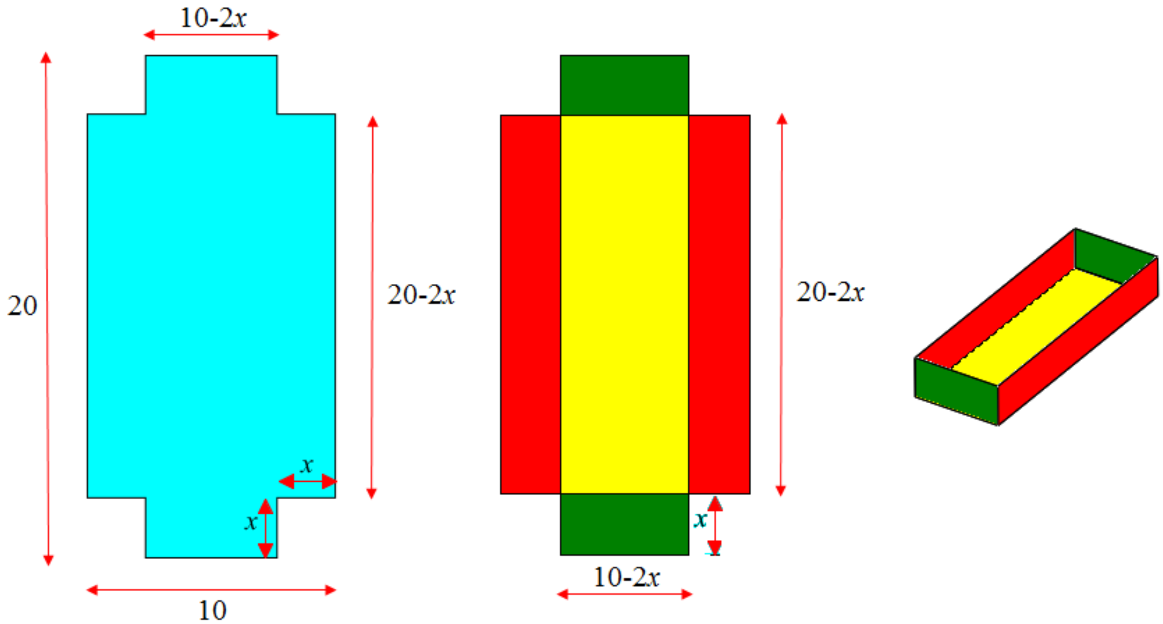
Denote como x el lado del cuadrado que cortará en cada esquina, tal como se indica en la figura de abajo.



¿Cuál es la función $V(x)$ que permite calcular el volumen de la caja que se construye a partir de la lámina recortada?

▼ ***Solución***

$V(x) = (10 - 2\,x)(20 - 2\,x)x$. Vea la figura para auxiliarse en la construcción de la función:



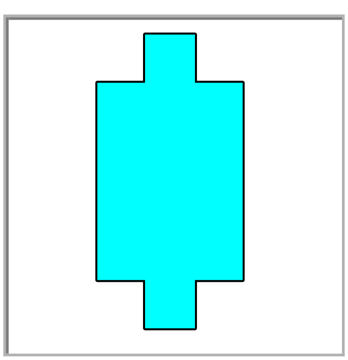
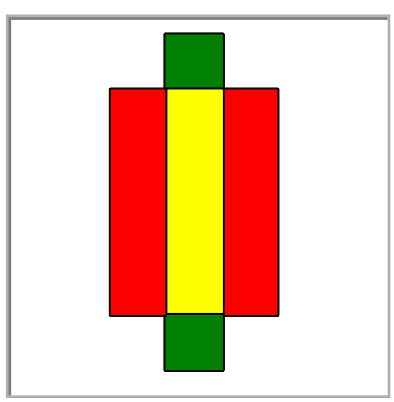
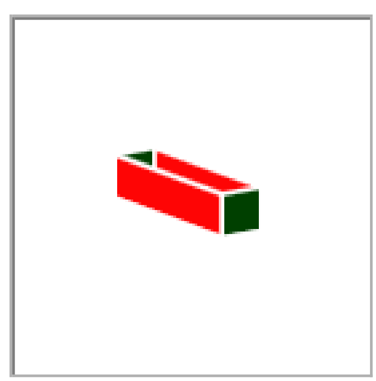
Nota: Observe que en este problema <u>no hemos necesitado introducir ningún sistema de coordenadas</u> para resolverlo.

Determinación de un dominio adecuado para la función

¿Cuáles son los valores x que tienen sentido en este problema para la función $V(x)$?

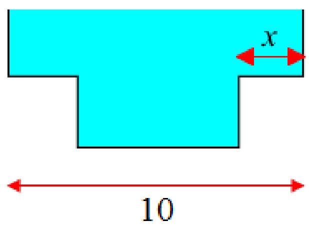
Solución

Al ir variando la barra deslizante de la figura de abajo es claro que se obtiene una caja si $0 < x < 5\}$.
¿Qué sucede si $x = 0$ o $x = 5$? Mueva la barra deslizante y vea lo que sucede cuando $x = 0$ o $x = 5$.

 x=		

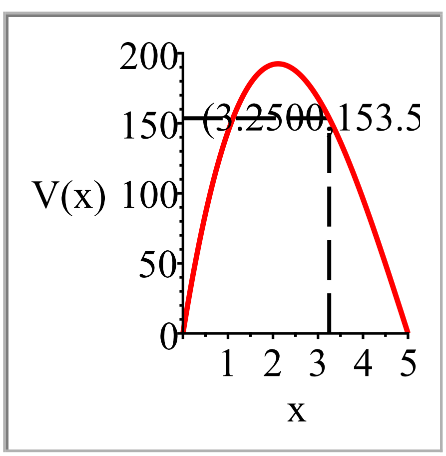
5 4 3 ...

Recuerde:

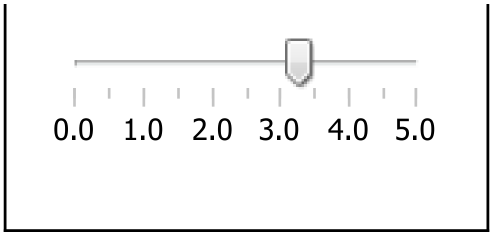


Determinar gráficamente el valor máximo de la función

En este problema se desea encontrar el valor máximo de la función $V(x) = (10 - 2\,x)(20 - 2\,x)x$. Abajo se muestra la gráfica de $V(x)$. ¿Cuál es el volumen máximo que puede obtenerse para la caja? Mueva la barra deslizante para encontrar el valor buscado. Note que la gráfica se ha construido en el intervalo $0 \le x \le 5$.



x=



Solución

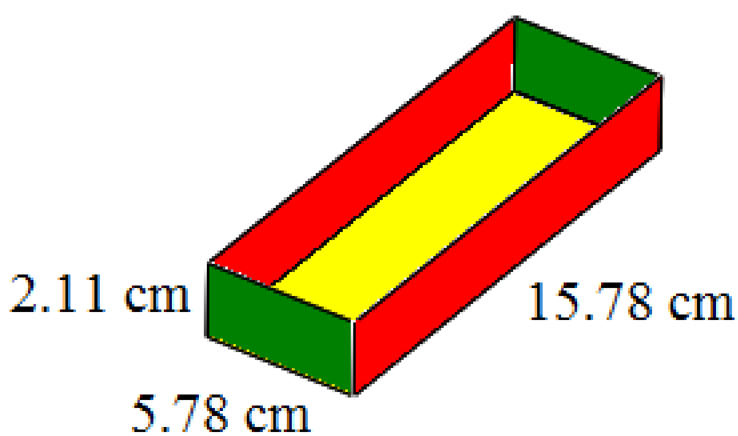
Al ir moviendo la barra deslizante es claro que el valor máximo de la función $V(x)$ ocurre en $x = 2.1111$, por lo que

$V_{max} \approx V(2.1111) = 192.4499\ cm^3$.

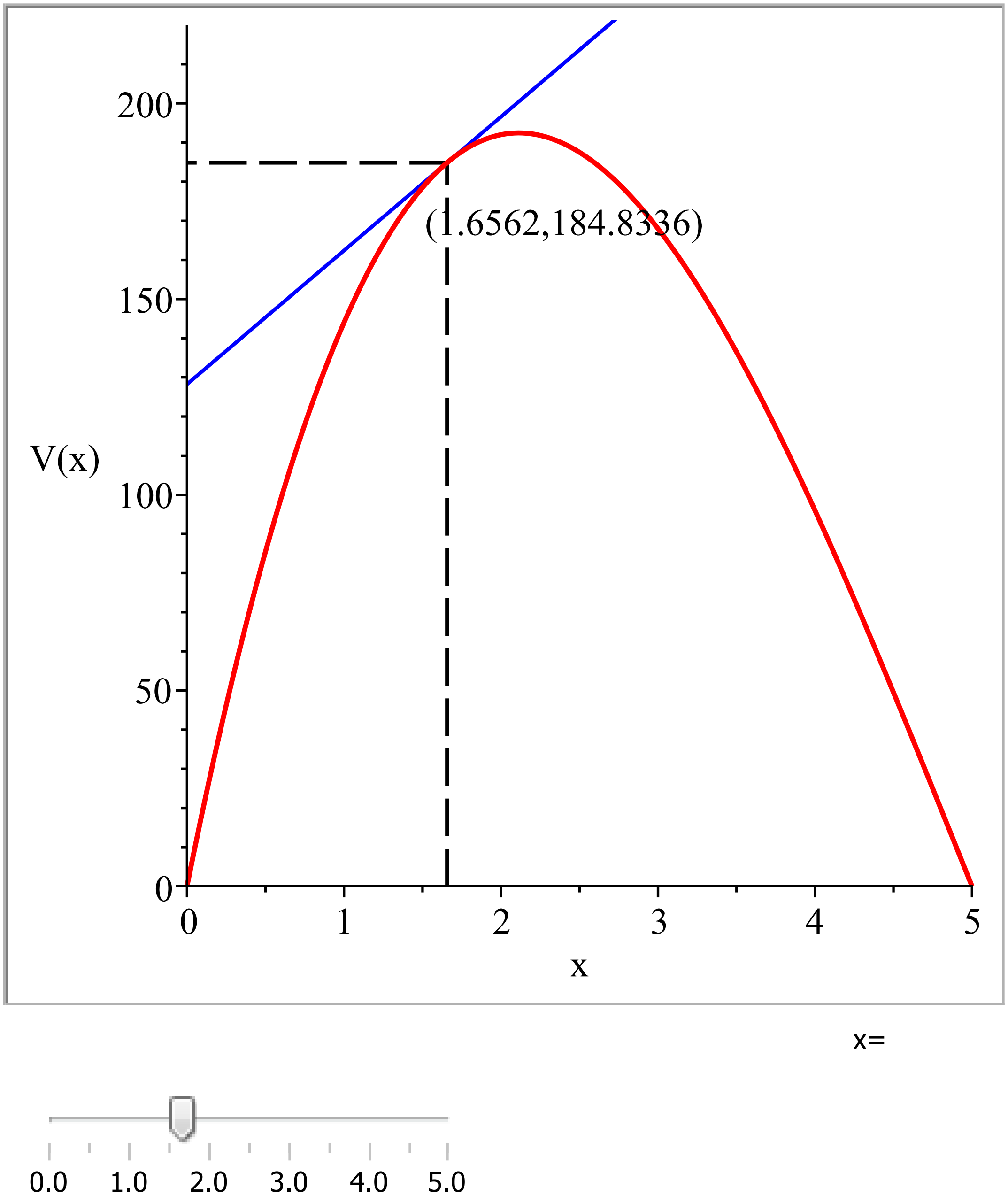
Con la información de la gráfica se puede determinar las dimensiones de la caja con el volumen máximo. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja con volumen máximo?

Solución

Aproximando a dos cifras decimales, las dimensiones de la caja con volumen máximo son las que se muestran en la figura de abajo:



Mueva la barra deslizante de la figura de abajo y observe que en la gráfica de $V(x)$ se puede dibujar una recta tangente horizontal en el máximo valor V_{max}. Note los signos de la pendiente de la recta tangente antes y después de alcanzar $V(x)$ su máximo valor V_{max}. Observe el signo de la pendiente de la recta tangente, *justo antes y justo después* de que la función alcanza el valor máximo.



Comentarios generales finales

Si en lugar de buscar el valor máximo de una función arbitraria, cuya derivada existe en todo punto, se busca el valor mínimo de ella, ¿cuáles serían los signos de la pendiente de la recta tangente poco antes de alcanzar el valor mínimo, en el valor mínimo, y poco después de alcanzar el valor mínimo? Utilice la figura de abajo para realizar el análisis.

Solución

Antes de alcanzar el valor mínimo, la pendiente de la recta tangente es negativa. En el valor mínimo, la recta tangente tiene pendiente nula. Poco después de alcanzar el valor mínimo, la pendiente de la recta tangente es positiva.