¿Pescar...o no pescar?

Dr. Ranferí Gutiérrez

Introducción

Esta hoja trata sobre el tema de la pesca, y cómo del conocimiento del comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación diferencial que rige la pesca (y de variar algunos de los parámetros de dicha ecuación diferencial) es posible predecir qué sucederá bajo determinadas condiciones de pesca: Si nos ponemos como meta una cierta tasa de pesca, ¿se provocará un daño inevitable a la población de peces de tal suerte que esta se extinga para siempre? ¿Existirá una tasa de pesca que permita que la población de peces no sea diezmada, y a la vez las personas se garanticen que habrá comida suficiente en el futuro? Estas y otras preguntas serán respondidas usando un modelo simple, el cual le brindará una idea clara de una de las muchas maneras en cómo se usan las ecuaciones diferenciales para hacer predicciones.

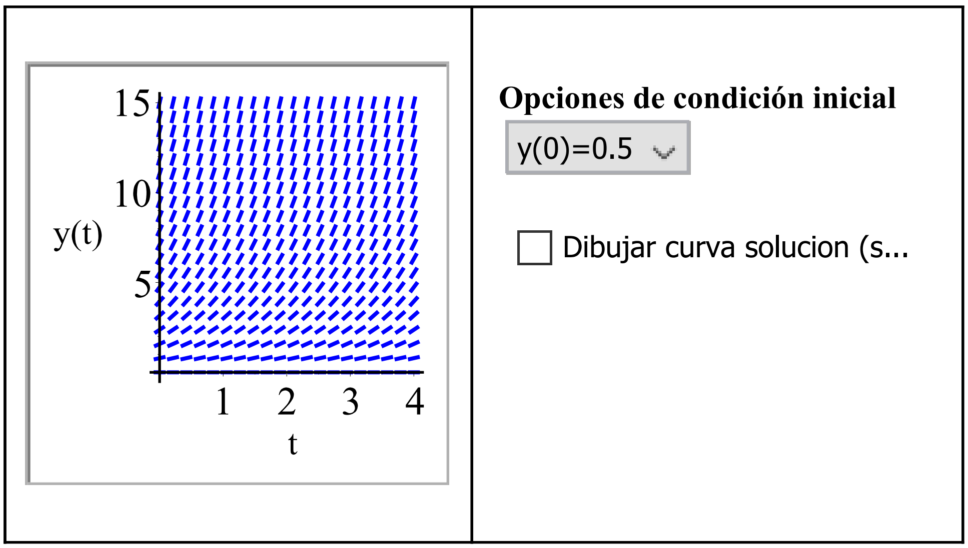
El modelo de la pesca

No hay sobrepoblación, no hay captura

Imagine el caso ideal en el cual no hay sobrepoblación ni tampoco captura. En este caso, $c = H = 0$. Por simplicidad suponga que $a = 1$. La ecuación diferencial, en este caso, es

$$\frac{dy}{dt} = y \qquad (3)$$

Abajo se muestra el campo de direcciones para la ecuación diferencial. ¿Qué sugiere el campo de direcciones que sucederá con la población de peces? Trate de responder solo viendo el campo de direcciones. Luego seleccione "Dibujar curva solución" y pruebe con las diferentes opciones de condición inicial que se muestra en el menú desplegable abajo de "Opciones de condición inicial".



No hay sobrepoblación, solamente captura

Considere nuevamente que $a = 1$, pero ahora suponga que se capturan peces a una tasa constante $H = 2$
toneladas/año. En este caso, la ecuación diferencial es

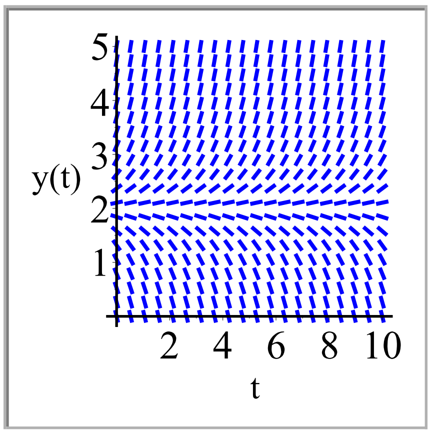
$$\frac{dy}{dt} = y - 2 \qquad (4)$$

Observando únicamente el campo de direcciones para (4) responda:

- ¿Existe algún cambio en el comportamiento de la población de peces?
- ¿Puede, sin graficar miembros de la solución, identificar los tres comportamientos que pueden surgir ahora en la solución $y(t)$?

- ¿Qué sucede con la población de peces cuando inicialmente hay más de 2 toneladas de ellos en el lago?
- ¿Qué sucede con la población de peces cuando inicialmente hay exactamente 2 toneladas de ellos en el lago?
- ¿Qué sucede con la población de peces cuando inicilamente hay menos de 2 toneladas de ellos en el lago?

Seleccione "Dibujar curva solución" y prueba con diferentes opciones de condición inicial para identificar los tres comportamientos indicados arriba.



Opciones de condición inicial

y(0)=2.5

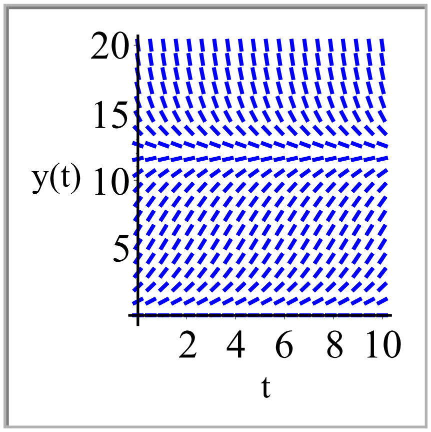
☐ Dibujar curva solucion (s...

No hay captura, solo sobrepoblación

Supondremos nuevamente que $a = 1$, pero ahora no habrá captura $(H = 0)$. Consideraremos que únicamente hay sobrepoblación. Un valor razonable, de acuerdo a observaciones, es considerar $c = \frac{1}{12}$. De la simple observación del campo de direcciones trate de predecir qué sucederá con la población de peces. A continuación seleccione "Dibujar curva solución" y prueba con las diferentes opciones de condición inicial para verificar sus suposiciones.

La ecuación diferencial en este caso es

$$\frac{dy}{dt} = y - \frac{y^2}{12} \qquad (5)$$

	**Opciones de condición inicial** y(0)=18 ☐ Dibujar curva solucion (se...

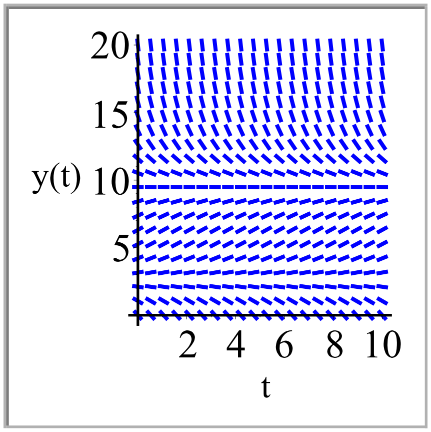
Hay captura y sobrepoblación

Ahora consideremos que hay captura y sobrepoblación, con los valores de las constantes *a*, *c*, y *h* utilizadas anteriormente. En este caso, la ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dt} = y - \frac{y^2}{12} - 2 \qquad (6)$$

Observe el campo de direcciones para la ecuación (6). ¿Cuántos tipos de comportamiento puede distinguir? Responda primero estudiando únicamente el campo de direcciones; luego seleccione "Dibujar curva solución" y varíe las opciones de condición inicial para ver lo que puede suceder con la población de peces, dependiendo de la condición inicial.

	Opciones de condición inicial y(0)=2 ☐ Dibujar curva solucion (sel...



Bibliografía

Robert L. Borrelli, Courtney S. Coleman. *Ecuaciones Diferenciales Una perspectiva de modelación*. Traducido de la primera edición en inglés. Oxford University Press, México 2002.