LAGRANGE Interpolation

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Josef *BETTEN*
RWTH Aachen University
Mathematical Models in Materials Science and Continuum Mechanics
Augustinerbach 4-20
D-52056 A a c h e n , Germany

<betten@mmw.rwth-aachen.de>

Durch n + 1 Stützwerte f (x[k]), k = 0,1,...,n, soll ein Polynom n-ten Grades gelegt werden. Mit Hilfe der *LAGRANGE*schen Interpolationsmethode erhält man ein Polynom n-ten Grades gemäß:

```
> restart:
> P(x):=Sum(f(x[k])*L[n,k](x),k=0..n);
```

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_{n,k}(x)$$

Für jedes k = 0,1, ..., n ist eine *LAGRANGE*sche Grundfunktion folgendermaßen definiert:

```
> restart:
> L[n,k](x):=Product((x-x[i])/(x[k]-x[i]),i=0..n),  k<>i;
>
```

$$L_{n,k}(x) := \prod_{i=0}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},\ k \neq i$$

```
>
> L[n,k](x[i]):=delta[ik]=piecewise(i=k,1,  i<>k,0);
```

$$L_{n,k}(x_i) := \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Beispiel: Gegeben seien sechs Messpunkte

```
> restart:
> [x[k],y[k]]=[[-1,0],[-1/2,3/4],[0,1],[1/4,10/9],[3/4,1/2],[1,0]]
  ;
```

$$[x_k, y_k] = \left[[-1, 0], \left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\right], [0, 1], \left[\frac{1}{4}, \frac{10}{9}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right], [1, 0] \right]$$

durch die ein Interpolationspolynom fünften Grades gelegt werden soll.
Zunächst werden *LAGRANGE*sche Grundfunktionen fünften Grades (n = 5) formuliert.

```
> restart:
> L[5,k](x):=Product((x-x[i])/(x[k]-x[i]),i=0..5); k<>i;
```

$$L_{5,k}(x) := \prod_{i=0}^{5} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$k \neq i$$

```
> L[5,k](x):=value(%%);
```

$$L_{5,k}(x) := \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\,(x-x_5)}{(x_k-x_0)\,(x_k-x_1)\,(x_k-x_2)\,(x_k-x_3)\,(x_k-x_4)\,(x_k-x_5)}$$

Für die einzelnen Stützstellen (k = 0,1,...,5) erhält man:

```
> L[5,0](x):=%*(x[k]-x[0])/(x-x[0]);
```

$$L_{5,0}(x) := \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\,(x-x_5)}{(x_k-x_1)\,(x_k-x_2)\,(x_k-x_3)\,(x_k-x_4)\,(x_k-x_5)}$$

```
> L[5,0](x):=
  subs({x[k]=-1,x[1]=-1/2,x[2]=0,x[3]=1/4,x[4]=3/4,x[5]=1},%);
```

$$L_{5,0}(x) := -\frac{16\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{35}$$

```
> L[5,0](-1):=subs(x=-1,%);
```

$$L_{5,0}(-1) := 1$$

```
> L[5,0](x):=expand(%%);
```

$$L_{5,0}(x) := -\frac{16}{35}x^5 + \frac{24}{35}x^4 - \frac{3}{35}x^3 - \frac{13}{70}x^2 + \frac{3}{70}x$$

```
> L[5,1](x):=L[5,k](x)*(x[k]-x[1])/(x-x[1]);
```

$$L_{5,1}(x) := \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\,(x-x_5)}{(x_k-x_0)\,(x_k-x_2)\,(x_k-x_3)\,(x_k-x_4)\,(x_k-x_5)}$$

```
> L[5,1](x):=
  subs({x[k]=-1/2,x[0]=-1,x[2]=0,x[3]=1/4,x[4]=3/4,x[5]=1},%);
```

$$L_{5,1}(x) := \frac{128\,(x+1)\,x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{45}$$

```
> L[5,1](-1/2):=subs(x=-1/2,%);
```

$$L_{5,1}\left(\frac{-1}{2}\right) := 1$$

```
> L[5,1](x):=expand(%%);
```

$$L_{5,1}(x) := \frac{128}{45}x^5 - \frac{128}{45}x^4 - \frac{104}{45}x^3 + \frac{128}{45}x^2 - \frac{8}{15}x$$

```
> L[5,2](x):=L[5,k](x)*(x[k]-x[2])/(x-x[2]);
```

$$L_{5,2}(x) := \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\,(x-x_5)}{(x_k-x_0)\,(x_k-x_1)\,(x_k-x_3)\,(x_k-x_4)\,(x_k-x_5)}$$

```
> L[5,2](x):=
  subs({x[k]=0,x[0]=-1,x[1]=-1/2,x[3]=1/4,x[4]=3/4,x[5]=1},%);
```

$$L_{5,\,2}(x) := -\frac{32\,(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{3}$$

```
> L[5,2](0):=subs(x=0,%);
```

$$L_{5,\,2}(0) := 1$$

```
> L[5,2](x):=expand(%%);
```

$$L_{5,\,2}(x) := -\frac{32}{3}x^5+\frac{16}{3}x^4+14\,x^3-\frac{19}{3}x^2-\frac{10}{3}x+1$$

```
> L[5,3](x):=L[5,k](x)*(x[k]-x[3])/(x-x[3]);
```

$$L_{5,\,3}(x) := \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_4)\,(x-x_5)}{(x_k-x_0)\,(x_k-x_1)\,(x_k-x_2)\,(x_k-x_4)\,(x_k-x_5)}$$

```
> L[5,3](x):=
  subs({x[k]=1/4,x[0]=-1,x[1]=-1/2,x[2]=0,x[4]=3/4,x[5]=1},%);
```

$$L_{5,\,3}(x) := \frac{512\,(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{45}$$

```
> L[5,3](1/4):=subs(x=1/4,%);
```

$$L_{5,\,3}\left(\frac{1}{4}\right) := 1$$

```
> L[5,3](x):=expand(%%);
```

$$L_{5,\,3}(x) := \frac{512}{45}x^5-\frac{128}{45}x^4-\frac{704}{45}x^3+\frac{128}{45}x^2+\frac{64}{15}x$$

```
> L[5,4](x):=L[5,k](x)*(x[k]-x[4])/(x-x[4]);
```

$$L_{5,\,4}(x) := \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\,(x-x_5)}{(x_k-x_0)\,(x_k-x_1)\,(x_k-x_2)\,(x_k-x_3)\,(x_k-x_5)}$$

```
> L[5,4](x):=
  subs({x[k]=3/4,x[0]=-1,x[1]=-1/2,x[2]=0,x[3]=1/4,x[5]=1},%);
```

$$L_{5,\,4}(x) := -\frac{512\,(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)}{105}$$

```
> L[5,4](3/4):=subs(x=3/4,%);
```

$$L_{5,\,4}\left(\frac{3}{4}\right) := 1$$

```
> L[5,4](x):=expand(%%);
```

$$L_{5,\,4}(x) := -\frac{512}{105}x^5-\frac{128}{105}x^4+\frac{192}{35}x^3+\frac{128}{105}x^2-\frac{64}{105}x$$

```
> L[5,5](x):=L[5,k](x)*(x[k]-x[5])/(x-x[5]);
```

$$L_{5,\,5}(x) := \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)}{(x_k-x_0)\,(x_k-x_1)\,(x_k-x_2)\,(x_k-x_3)\,(x_k-x_4)}$$

```
> L[5,5](x):=
  subs({x[k]=1,x[0]=-1,x[1]=-1/2,x[2]=0,x[3]=1/4,x[4]=3/4},%);
```

$$L_{5,5}(x) := \frac{16\,(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{9}$$

```
> L[5,5](1):=subs(x=1,%);
```

$$L_{5,5}(1) := 1$$

```
> L[5,5](x):=expand(%%);
```

$$L_{5,5}(x) := \frac{16}{9}x^5 + \frac{8}{9}x^4 - \frac{13}{9}x^3 - \frac{7}{18}x^2 + \frac{1}{6}x$$

Obige *LAGRANGE*sche Grundfunktionen können eleganter vermöge einer "DO-Schleife" direkt erzeugt werden:

```
> restart:
> L[5,k](x):=Product((x-x[i])/(x[k]-x[i]),i=0..5); k<>i;
```

$$L_{5,k}(x) := \prod_{i=0}^{5} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

$$k \neq i$$

```
> L[5,k](x):=value(%%);
```

$$L_{5,k}(x) := \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)(x_k-x_3)(x_k-x_4)(x_k-x_5)}$$

```
> for i from 0 to 5 do
  L[5,i](x):=L[5,k](x)*(x[k]-x[i])/(x-x[i]) od;
```

$$L_{5,0}(x) := \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)(x_k-x_3)(x_k-x_4)(x_k-x_5)}$$

$$L_{5,1}(x) := \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_k-x_0)(x_k-x_2)(x_k-x_3)(x_k-x_4)(x_k-x_5)}$$

$$L_{5,2}(x) := \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_3)(x_k-x_4)(x_k-x_5)}$$

$$L_{5,3}(x) := \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)(x_k-x_4)(x_k-x_5)}$$

$$L_{5,4}(x) := \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)(x_k-x_3)(x_k-x_5)}$$

$$L_{5,5}(x) := \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)(x_k-x_3)(x_k-x_4)}$$

Mit den gegebenen Stützwerten x[0],...,x[5] erhält man durch eine weitere "DO-Schleife" die *LAGRANGE* Polynome:

```
> for i from 0 to 5 do L[5,i](x):= subs({x[k]=x[i]},
```

```
{x[0]=-1,x[1]=-1/2,x[2]=0,x[3]=1/4,x[4]=3/4,x[5]=1},L[5,i](x))
od;
```

$$L_{5,0}(x) := -\frac{16\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{35}$$

$$L_{5,1}(x) := \frac{128\,(x+1)\,x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{45}$$

$$L_{5,2}(x) := -\frac{32\,(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{3}$$

$$L_{5,3}(x) := \frac{512\,(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-1)}{45}$$

$$L_{5,4}(x) := -\frac{512\,(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)}{105}$$

$$L_{5,5}(x) := \frac{16\,(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{9}$$

Weiterhin findet man:

```
> for i from 0 to 5 do L[5,i](x):=expand(L[5,i](x)) od;
```

$$L_{5,0}(x) := -\frac{16}{35}x^5+\frac{24}{35}x^4-\frac{3}{35}x^3-\frac{13}{70}x^2+\frac{3}{70}x$$

$$L_{5,1}(x) := \frac{128}{45}x^5-\frac{128}{45}x^4-\frac{104}{45}x^3+\frac{128}{45}x^2-\frac{8}{15}x$$

$$L_{5,2}(x) := -\frac{32}{3}x^5+\frac{16}{3}x^4+14\,x^3-\frac{19}{3}x^2-\frac{10}{3}x+1$$

$$L_{5,3}(x) := \frac{512}{45}x^5-\frac{128}{45}x^4-\frac{704}{45}x^3+\frac{128}{45}x^2+\frac{64}{15}x$$

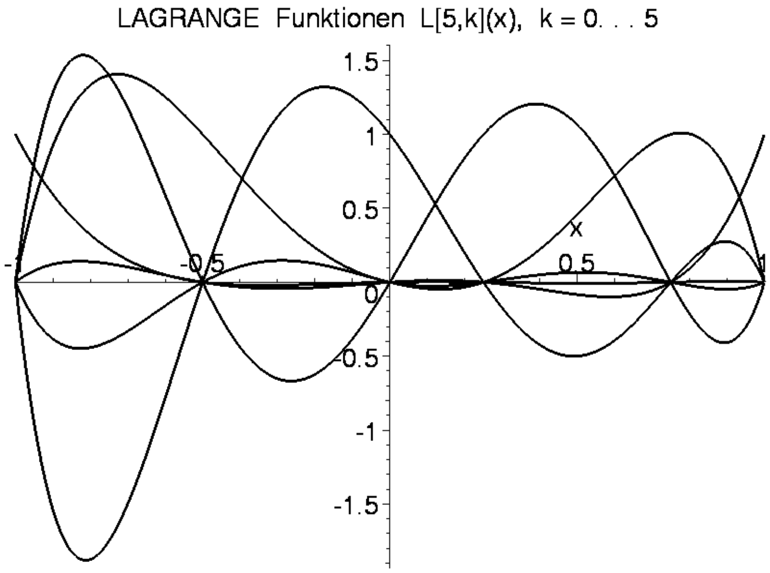
$$L_{5,4}(x) := -\frac{512}{105}x^5-\frac{128}{105}x^4+\frac{192}{35}x^3+\frac{128}{105}x^2-\frac{64}{105}x$$

$$L_{5,5}(x) := \frac{16}{9}x^5+\frac{8}{9}x^4-\frac{13}{9}x^3-\frac{7}{18}x^2+\frac{1}{6}x$$

Im folgenden Bild sind die *LAGRANGE* Polynome L[5,k](x), k =0,1,...,5 dargestellt.

```
> alias(th=thickness,co=color):
> plot({seq(L[5,k](x),k=0..5)},x=-1..1,xtickmarks=4,th=3,co=black,
```

```
  title="LAGRANGE  Funktionen  L[5,k](x),  k = 0. . . 5");
>
```



Mit obigen *LAGRANGE* Polynomen und den gegebenen Stützwerten f(x[k]) = y[k] ermittelt man das Intepolationspolynom fünften Grades gemäß:

```
>
> P[5](x):=Sum(y[kappa]*L[5,kappa](x),kappa=0..5);
```

$$P_5(x) := \sum_{\kappa=0}^{5} y_\kappa L_{5,\kappa}(x)$$

```
> with(linalg):
> y[k]:=matrix(1,6,[0,3/4,1,10/9,1/2,0]);
```

$$y_k := \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{10}{9} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> L[5,k](x):=matrix(6,1,[seq(L[5,k](x),k=0..5)]);
```

$$L_{5,k}(x) := \begin{bmatrix} -\frac{16}{35}x^5 + \frac{24}{35}x^4 - \frac{3}{35}x^3 - \frac{13}{70}x^2 + \frac{3}{70}x \\ \frac{128}{45}x^5 - \frac{128}{45}x^4 - \frac{104}{45}x^3 + \frac{128}{45}x^2 - \frac{8}{15}x \\ -\frac{32}{3}x^5 + \frac{16}{3}x^4 + 14\,x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 1 \\ \frac{512}{45}x^5 - \frac{128}{45}x^4 - \frac{704}{45}x^3 + \frac{128}{45}x^2 + \frac{64}{15}x \\ -\frac{512}{105}x^5 - \frac{128}{105}x^4 + \frac{192}{35}x^3 + \frac{128}{105}x^2 - \frac{64}{105}x \\ \frac{16}{9}x^5 + \frac{8}{9}x^4 - \frac{13}{9}x^3 - \frac{7}{18}x^2 + \frac{1}{6}x \end{bmatrix}$$

```
> P[5](x):=multiply(y[k],L[5,k](x));
```

$$P_5(x) := \begin{bmatrix} 1 + \frac{4736}{2835}x^5 - \frac{1616}{2835}x^4 - \frac{6728}{2835}x^3 - \frac{1219}{2835}x^2 + \frac{664}{945}x \end{bmatrix}$$

```
> P[5](x):=1+(4736/2835)*x^5-(1616/2835)*x^4-(6728/2835)*x^3-
  (1219/2835)*x^2+(664/945)*x;
```

$$P_5(x) := 1 + \frac{4736}{2835}x^5 - \frac{1616}{2835}x^4 - \frac{6728}{2835}x^3 - \frac{1219}{2835}x^2 + \frac{664}{945}x$$

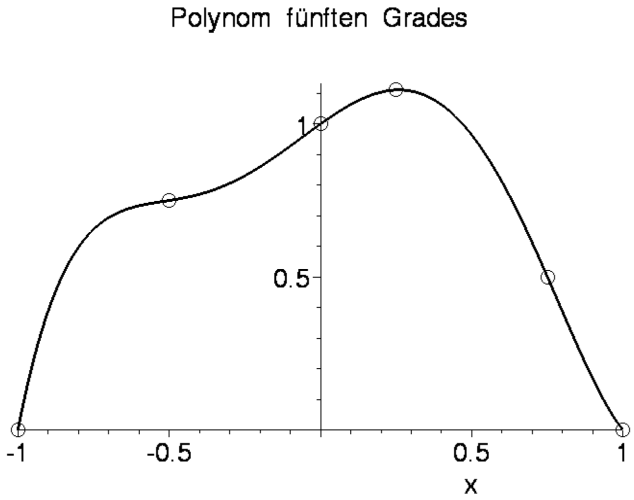
Dieses Polynom mit den Messwerten

```
> [x[k],y[k]]=
  [[-1,0],[-1/2,3/4],[0,1],[1/4,10/9],[3/4,1/2],[1,0]];
```

$$[x_k, y_k] = \left[[-1, 0], \left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\right], [0, 1], \left[\frac{1}{4}, \frac{10}{9}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right], [1, 0]\right]$$

wird im nächsten Bild dargestellt.

```
> alias(sc=scaling,th=thickness,co=color):
> p[1]:=plot(P[5](x),x=-1..1,sc=constrained,th=3,co=black,
  title="Polynom   fünften   Grades"):
> p[2]:=plot(rhs(%%%),x=-1..1,xtickmarks=4,ytickmarks=3,
  style=point,symbol=circle,symbolsize=30,th=4,co=black):
> plots[display](seq(p[i],i=1..2));
```



Interpolationspolynome können auch mit Hilfe folgender Determinante erzeugt werden.

```
> restart:  with(linalg):
> M:=Matrix([[P(x),seq(x^k,k=0..3),___,x^n],
  [y[0],seq(x[0]^k,k=0..3),___,x[0]^n],
  [y[1],seq(x[1]^k,k=0..3),___,x[1]^n],
  [y[2],seq(x[2]^k,k=0..3),___,x[2]^n],
  [°,°,°,°,°,°,°],
  [y[n],seq(x[n]^k,k=0..3),___,x[n]^n]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & x^3 & \_\_ & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \_\_ & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \_\_ & x_1^n \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \_\_ & x_2^n \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \_\_ & x_n^n \end{bmatrix}$$

Das Polynom P(x) n-ten Grades erhält man aus der Determinante von M gemäß:

```
> restart:
> Polynom_P(x):=Solve(Det(M)=0,P(x));
```

$$\text{Polynom\_P}(x) := \text{Solve}(\text{Det}(M) = 0, \text{P}(x))$$

Als Beispiel werde ein Interpolationspolynom fünften Grades gesucht durch die oben angenommenen sechs Knotenpunkte.

```
> restart:  with(linalg):
> M:=matrix(7,7,[[P[5](x),seq(x^k,k=0..5)],
  [y[0],seq(x[0]^k,k=0..5)], [y[1],seq(x[1]^k,k=0..5)],
  [y[2],seq(x[2]^k,k=0..5)], [y[3],seq(x[3]^k,k=0..5)],
  [y[4],seq(x[4]^k,k=0..5)], [y[5],seq(x[5]^k,k=0..5)]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} P_5(x) & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 & x_0^5 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 \\ y_3 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & x_3^5 \\ y_4 & 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 & x_4^5 \\ y_5 & 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 & x_5^5 \end{bmatrix}$$

```
> data:=[-1,0],[-1/2,3/4],[0,1],[1/4,10/9],[3/4,1/2],[1,0];
```

$$data := [-1, 0], \left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\right], [0, 1], \left[\frac{1}{4}, \frac{10}{9}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right], [1, 0]$$

```
> m:=subs({x[0]=-1,x[1]=-1/2,x[2]=0,x[3]=1/4,x[4]=3/4,x[5]=1},
  {y[0]=0,y[1]=3/4,y[2]=1,y[3]=10/9,y[4]=1/2,y[5]=0},%%);
```

$$m := \begin{bmatrix} P_5(x) & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{-1}{32} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{10}{9} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \frac{1}{256} & \frac{1}{1024} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{16} & \frac{27}{64} & \frac{81}{256} & \frac{243}{1024} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> P[5](x):=solve(det(m)=0,P[5](x));
```

$$P_5(x) := 1 - \frac{1616}{2835} x^4 + \frac{664}{945} x - \frac{1219}{2835} x^2 - \frac{6728}{2835} x^3 + \frac{4736}{2835} x^5$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der *LAGRANGE* Interpolation überein.
Mit Maple erhält man durch den Befehl **evalf** eine Gleitpunktdarstellung (**floating point**

arithmetic) gemäß.

```
> Q[5](x):=evalf(P[5](x));
```

$$Q_5(x) := 1. - 0.5700176367\,x^4 + 0.7026455026\,x - 0.4299823633\,x^2 - 2.373192240\,x^3 + 1.670546737\,x^5$$

```
> Delta(x):=P[5](x)-Q[5](x);
```

$$\Delta(x) := 0.$$

Maple rechnet mit einer Mantissenlänge von 10. Man erhält im obigen Beispiel das exakte Ergebnis.
Je nach Problem kann die Genauigkeit erhöht werden durch eine zusätzliche Angabe: Digits > 10.
Ebenso erhält man auch Näherungen durch Digits < 10, wie folgendermaßen gezeigt wird:

```
> q[5](x):=evalf(P[5](x),3);
```

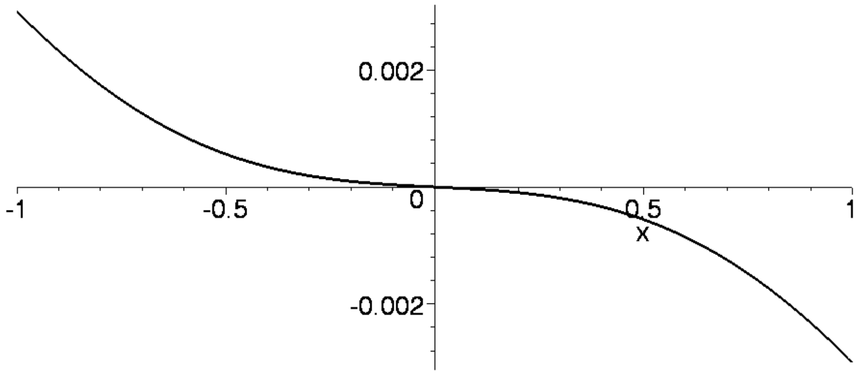
$$q_5(x) := 1. - 0.570\,x^4 + 0.703\,x - 0.430\,x^2 - 2.37\,x^3 + 1.67\,x^5$$

Als Abweichung gilt:

```
> delta(x):=P[5](x)-q[5](x);
```

$$\delta(x) := -0.0000176367\,x^4 - 0.0003544974\,x + 0.0000176367\,x^2 - 0.003192240\,x^3 + 0.000546737\,x^5$$

```
> alias(th=thickness,co=color):
> plot(delta(x),x=-1..1,th=3,co=black,xtickmarks=4,ytickmarks=3);
```



Fehlernorm

```
>  L[2]:=sqrt((1/2)*Int((delta(xi))^2,xi=-1..1))=
  evalf(sqrt((1/2)*int((delta(x))^2,x=-1..1)),4);
```

$$L_2 := \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1} \delta(\xi)^2\,d\xi} = 0.001239$$

Bei einer Vielzahl von Knotenpunkten (Meßpunkten) führt die *LAGRANGE* Interpolation auf ein Polynom hohen Grades, das je nach Lage der Stützstellen zu mehr oder weniger starken "Schwingungen" neigt. Die *LAGRANGE* Interpolation ist in solchen Fällen nicht sehr nützlich. Vorteilhafter sind dann interpolierende Splines zur Erzeugung glatter Kurven, wie im Folgenden gezeigt wird.

```
> restart:  with(CurveFitting):
> data:=[-1,0],[-1/2,3/4],[0,1],[1/4,10/9],[3/4,1/2],[1,0];
```

$$data := [-1, 0], \left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\right], [0, 1], \left[\frac{1}{4}, \frac{10}{9}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right], [1, 0]$$

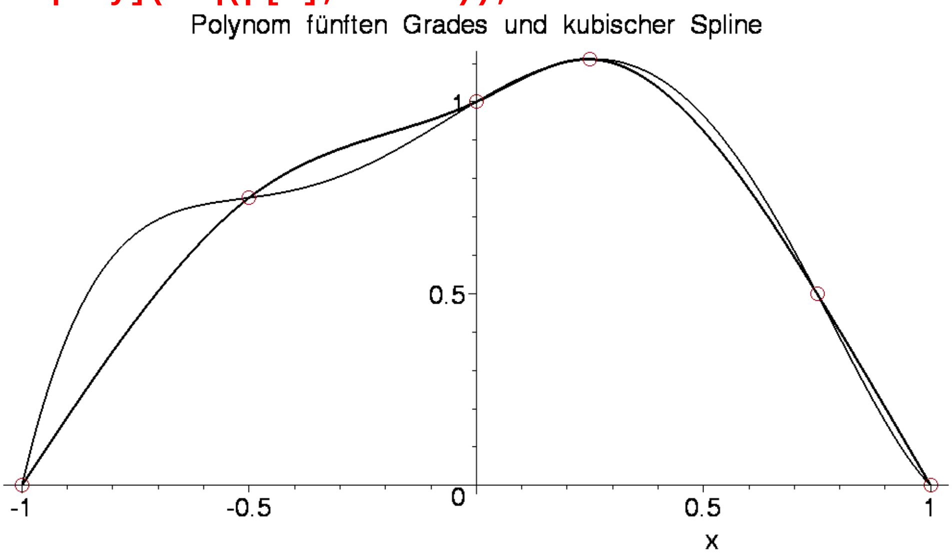
```
> S[3](x):=Spline([data],x,degree=3);
```

$$S_3(x) := \begin{cases} \frac{211}{340} - \frac{1759}{1020}x - \frac{299}{85}x^2 - \frac{299}{255}x^3 & x < \frac{-1}{2} \\ 1 + \frac{563}{1020}x + \frac{88}{85}x^2 + \frac{95}{51}x^3 & x < 0 \\ 1 + \frac{563}{1020}x + \frac{88}{85}x^2 - \frac{4484}{765}x^3 & x < \frac{1}{4} \\ \frac{597}{680} + \frac{121}{60}x - \frac{82}{17}x^2 + \frac{1492}{765}x^3 & x < \frac{3}{4} \\ \frac{99}{68} - \frac{301}{1020}x - \frac{148}{85}x^2 + \frac{148}{255}x^3 & otherwise \end{cases}$$

```
> P[5](x):=1+(664/945)*x-(1219/2835)*x^2-(6728/2835)*x^3-
  (1616/2835)*x^4+(4736/2835)*x^5;
```

$$P_5(x) := 1 + \frac{664}{945}x - \frac{1219}{2835}x^2 - \frac{6728}{2835}x^3 - \frac{1616}{2835}x^4 + \frac{4736}{2835}x^5$$

```
> alias(th=thickness,co=color):
> p[1]:=plot(S[3](x),x=-1..1,th=3,co=black,
  title="Polynom  fünften  Grades  und  kubischer  Spline"):
> p[2]:=plot(P[5](x),x=-1..1,ytickmarks=3,th=2,co=black):
> p[3]:=plot([data],style=point,symbol=circle,symbolsize=30):
> plots[display](seq(p[k],k=1..3));
```



Man erkennt die "schwingende" Form des *LAGRANGE* Polynoms fünften Grades, während die Spline Interpolation stückweise kubische Polynome erzeugt.
Die Bezeichnung "Spline" bedeutet "dünnes Brett". Ein leicht biegsames Lineal wird an die Knotenpunkte gelegt. Somit kann eine geglättete Kurve gezeichnet werden.
Im obigen Bild sind ein Interpolationspolynom P[5](x) fünften Grades und eine kubische Splinefunktion dargestellt. Ergänzend sind im folgenden Bild ein linearer Spline und eine Splinefunktion fünften Grades ausgedruckt.

```
> for i in [1,5] do S[i](x):=Spline([data],x,degree=i) od;
```

$$S_1(x) := \begin{cases} \frac{3}{2}+\frac{3x}{2} & x<\frac{-1}{2} \\ 1+\frac{x}{2} & x<0 \\ 1+\frac{4x}{9} & x<\frac{1}{4} \\ \frac{17}{12}-\frac{11x}{9} & x<\frac{3}{4} \\ 2-2x & \textit{otherwise} \end{cases}$$

$S_5(x) := \{$

$$\frac{55410973}{49336812}+\frac{10301805}{5481868}x+\frac{61910150}{12334203}x^2+\frac{4173320}{587343}x^3+\frac{2086660}{587343}x^4+\frac{417332}{587343}x^5,\ x<\frac{-1}{2}$$

$$1+\frac{4567805}{7048116}x+\frac{1168540}{12334203}x^2-\frac{33843500}{12334203}x^3-\frac{77663360}{12334203}x^4-\frac{39829316}{12334203}x^5,\ x<0$$

$$1+\frac{4567805}{7048116}x+\frac{1168540}{12334203}x^2-\frac{33843500}{12334203}x^3-\frac{77663360}{12334203}x^4+\frac{19192064}{1762029}x^5,\ x<\frac{1}{4}$$

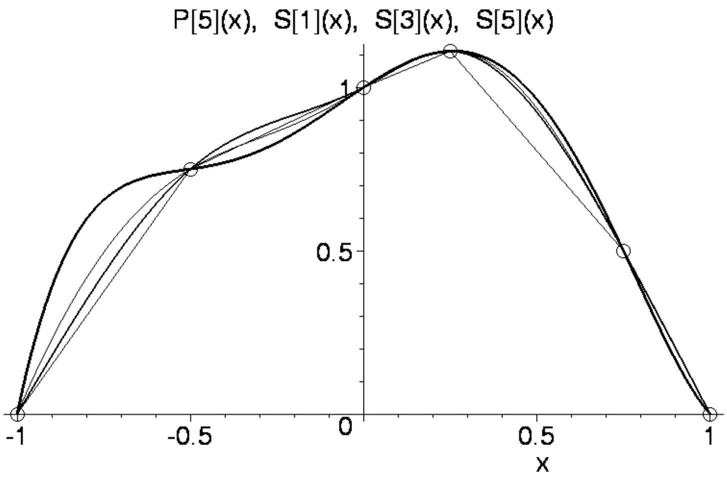
$$\frac{267029209}{263129664}+\frac{69405365}{197347248}x+\frac{60830255}{24668406}x^2-\frac{150829850}{12334203}x^3+\frac{156309340}{12334203}x^4-\frac{52833712}{12334203}x^5,$$

$$x<\frac{3}{4}$$

$$-\frac{21225079}{32891208}+\frac{1126777285}{98673624}x-\frac{333609740}{12334203}x^2+\frac{334536640}{12334203}x^3-\frac{167268320}{12334203}x^4+\frac{33453664}{12334203}x^5,$$

otherwise

```
> alias(th=thickness,co=color):
> p[1]:=plot(S[1](x),x=-1..1,th=1,co=black,
  title="P[5](x),  S[1](x),  S[3](x),  S[5](x)"):
> p[2]:=plot(S[3](x),x=-1..1,ytickmarks=3,th=2,co=black):
> p[3]:=plot(S[5](x),x=-1..1,th=1,co=black):
> p[4]:=plot(P[5](x),x=-1..1,th=3,co=black):
> p[5]:=plot([data],style=point,symbol=circle,
  symbolsize=30,th=3,co=black):
> plots[display](seq(p[k],k=1..5));
```



Darin verbindet der lineare Spline die Knotenpunkte linear. Die Splinefunktionen dritten und fünften Grades unterscheiden sich geringfügig. Sie bilden eine gute Intepolation der Messpunkte. Wegen des geringeren Aufwandes ist die kubische Splineinterpolation vorzuziehen. Darüber hinaus schmiegen sich die Spline-Kurven mit wachsendem " degree" immer stärker an das "schwingende" Interpolations Polynom P[5](x). Im Grenzfall degree ---> infinity sind das *LAGRANGE*sche Interpolations Polynom und die Spline-Kurve deckungsgleich:

```
> restart:
> with(CurveFitting):
> data:=[-1,0],[-1/2,3/4],[0,1],[1/4,10/9],[3/4,1/2],[1,0];
```

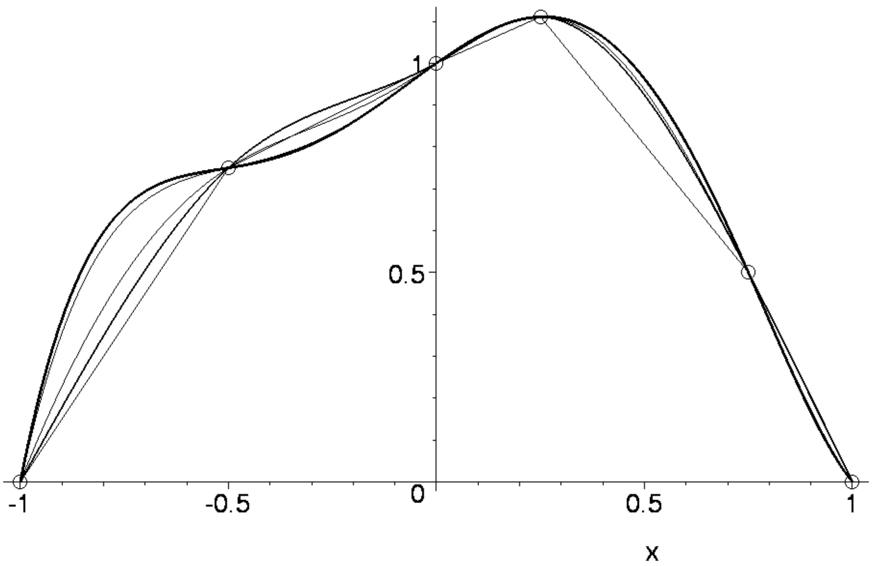
$$data := [-1, 0], \left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\right], [0, 1], \left[\frac{1}{4}, \frac{10}{9}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right], [1, 0]$$

```
> P[5](x):=1+(664/945)*x-(1219/2835)*x^2-(6728/2835)*x^3-
  (1616/2835)*x^4+(4736/2835)*x^5;
```

$$P_5(x) := 1 + \frac{664}{945}x - \frac{1219}{2835}x^2 - \frac{6728}{2835}x^3 - \frac{1616}{2835}x^4 + \frac{4736}{2835}x^5$$

```
> for i in [1,3,5,10,11] do
  S[i](x):=Spline([data],x,degree=i) od:
>
> alias(sc=scaling,th=thickness,co=color):
> p[1]:=plot({S[1](x),S[5](x),S[10](x),S[11](x)},x=-1..1,
  sc=constrained,xtickmarks=4,ytickmarks=3,th=1,co=black):
> p[2]:=plot(S[3](x),x=-1..1,th=2,co=black):
> p[3]:=plot(P[5](x),x=-1..1,th=3,co=black,
  title="P[5],  S[1],  S[3],  S[5],  S[10],  S[11]"):
> p[4]:=plot([data],style=point,symbol=circle,symbolsize=30,
  th=4,co=black):
> plots[display](seq(p[k],k=1..4));
```

P[5], S[1], S[3], S[5], S[10], S[11]



Abstand zwischen P[5](x) **und** S[n](x) **ausgedrückt durch die Fehlernorm** L-zwei

```
> L[2]:=sqrt((1/2)*Int((P[5](xi)-S[n](xi))^2,xi=-1..1));
```

$$L_2 := \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1}(P_5(\xi)-S_n(\xi))^2\,d\xi}$$

```
> for i in [1,3,5,10,11] do
  L[2][i]:=evalf(sqrt((1/2)*int((P[5](x)-S[i](x))^2,x=-1..1))) od;
```

$$L_{2_1} := 0.1214617419$$

$$L_{2_3} := 0.09148476591$$

$$L_{2_5} := 0.06555433402$$

$$L_{2_{10}} := 0.01230545934$$

$$L_{2_{11}} := 0.$$

Grenzwert für dgree = infinity

```
> L[2][infinity]:=
  Limit(sqrt((1/2)*Int((P[5](xi)-S[n](xi))^2,x=-1..1)),n=infinity)
  =0;
```

$$L_{2_\infty} := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1}(P_5(\xi)-S_n(\xi))^2\,dx} = 0$$

Bereits für degree >= 11 fällt die Splinefunktion S[n](x) im hier betrachteten Beispiel mit dem *LAGRANGE*schen Interpolationspolynom P[5](x) nahezu zusammen.

Formfunktionen (shape functions) für finite Elemente

Die *LAGRANGE*sche Interpolationsmethode ist neben anderen Verfahren sehr hilfreich zur Erzeugung von Formfunktionen sowohl für ebene als auch für räumliche finite Elemente. Formfunktionen N(x,y,z) sind Interpolationsfunktionen, die einen Zusammenhang zwischen den Knotenvariablen u[k], ... , w[k] und den Verschiebungen u(x,y,z), ..., w(x,y,z) im Innern eines finiten Elementes herstellen gemäß:

```
> restart:
> [u(x,y,z),__,w(x,y,z)]=
  [Sum(u[k]*N[k](x,y,z),k=1..n),__,Sum(w[k]*N[k](x,y,z),k=1..n)];
```

$$[\mathrm{u}(x, y, z), \_\_, \mathrm{w}(x, y, z)] = \left[\sum_{k=1}^{n} u_k N_k(x, y, z), \_\_, \sum_{k=1}^{n} w_k N_k(x, y, z) \right]$$

Beispielsweise werden in [*BETTEN, J.:* Finite Elemente für Ingenieure 1, zweite Aufl., 2003, Springer, Berlin / Heidelberg] eine Vielzahl von Formfunktionen der *LAGRANGE* - Klasse und anderer Typen für Dreiecks-, Rechteck-, Tetraeder-, Hexaederelemente etc. aufgestellt.

```
>
```